

ON THE RESOLUTION OF EQUATIONS\*

By A.T. VANDERMONDE.

\*This Memoir has been read in the course of November 1770, and summarized by de Fouchy on the 28<sup>th</sup> of the same month; but it has failed to be present in the printing of the Memoirs of 1771, because I had not yet in 1770, the honour of being an Academy member. Before this time, there had appeared a work by Waring entitled *Meditationes algebraicae*, a work of which I was unaware, and where, among the very interesting investigations on equations, we find theorems analogous to those of *article V* of this memoir. Since then, the illustrious Lagrange has published in the two first volumes of the new *Mémoires de Berlin*, under the title *Réflexions sur la résolution algébrique des Équations*, an analysis of the methods of Tschirnaus, Euler & Bézout, ending with the exposition of a certain method which he proposes to apply to non-resolvable equations. You will observe some conformity between this work and mine, of which I can only be flattered. I must forewarn that the first volume of the *Mémoires de l'Académie royale de Marine*, will include ingenious investigations already published, *sur la Résolution des Équations*, by de Marguerie; and that in the fifth volume of the Royal Society of Turin, you will find some general views on this question, no doubt very profound, by the Marquis de Condorcet

---

Among the works produced in recent years on the general resolution of equations, the most remarkable are the works of Euler in Volume IX of the *New Commentaries of Petersburg*, and that of Bézout, in the volume of this Academy for the year 1765. It suffices to consult these two excellent articles in order to have an idea of the progress of analysis in this matter, and of the difficulties of all kinds which remain to be overcome. It has appeared to me that one of the difficulties may be able to be attributed to the very nature of the analytical methods, these only ones of which use has been ; and I have decided to try another way. The method I am going to present, does not assume the introduction of any unknown, and where this may be at some instant in the progress of the calculation, there we have only to verify easy equations, in performing the indicated operations; that shall be its particular characteristic: it is up to the Geometers to appreciate its advantages.

I. We demand the most general and simplest values, which together may be able to satisfy an equation of a determined degree.

II. Developing first the state of this equation, as an example. We note that the equation

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

is an identical equation, and as a consequence the condition

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

is satisfied on making either  $x = a$ , or  $x = b$  ; but

$$\left[ \frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2} \right]^2 - (a+b) \left[ \frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2} \right] + ab = 0,$$

is also an identical equation, independent of the extraction of the root indicated; from which it follows that if we had not known this quantity  $\frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2}$ , and we had wished to express that sought assumed to be  $x$ , it would be necessary to have

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0.$$

Now it is observed that this expression  $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)}$ , which indicates the quantity of which the square is  $a^2 + b^2 - 2ab$ , is an ambiguous expression, since  $a^2 + b^2 - 2ab$  is equally the square of just as many quantities  $r(a - b)$  as there are numbers which satisfy the condition  $r^2 = 1$ .

Hence there are two ways of considering the equation

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0;$$

(i) as an equation of the second degree, & thus there the unknown representing an ambiguous quantity ; (ii) as a product of two factors of the first degree, thus it is the equation which is ambiguous, and the unknown there is capable of two values which are not ambiguous.

If it were simply a matter of solving the equation

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

it would be required to choose the latter point of view ; but if we ask for a root which may be composed from these coefficients  $(a + b)$  &  $ab$ , this root necessarily will be ambiguous: for  $a$  being a value of  $x$ , it would be required that we should have

$$a = \text{function} [(a + b), ab] ;$$

& since on interchanging the letters  $a$  &  $b$  within  $(a + b)$  and  $ab$ , these quantities remain absolutely the same, whatever their function may be ; with the exchange assumed to be made between these two members, we will have again

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

3

$$b = \text{function} [(a+b), ab].$$

Now these two conditions can exist separately only due to the ambiguity of the function.

This function is, for example,

$$\frac{1}{2} \left[ a+b+\sqrt{(a+b)^2-4ab} \right],$$

which is deduced easily from the above value, because

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$$

A quantity of which one could not say in any sense that it equals  $a$ , or that it equals  $b$ , would not solve the proposed equation at all ; but any quantity by which one can say it is resolved in a certain sense: such as, for example,

$$\frac{1}{2} \left[ a+b+\frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})}+\sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2} \sqrt{(a+b)^2-4ab} \right],$$

which effectively resolves it, because in a certain manner the square of  $\frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})}+\sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2}$  equals 1 ; such is again the case of

$$\frac{2ab}{a+b+\sqrt{(a+b)^2-4ab}},$$

which is satisfactory only after the reduction to a common denominator.

Of these three general values, the simplest is the first : but we demand further values which are satisfied concurrently, that is, those for which the sum is  $a+b$ , and the product is  $ab$ . It will be necessary for example to determine a sense in which the ambiguous function equals ; and to find, with that in place, how it may equal  $b$ , now that is very easy here, since

$$\frac{1}{2} \left[ a+b+\sqrt{(a+b)^2-4ab} \right],$$

is only equal to  $a$ , on assuming

$$\sqrt{(a+b)^2-4ab}=a-b;$$

from which it follows that

$$\frac{1}{2} \left[ a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab} \right],$$

which, in this sense, is  $b$ .

III. Again we may take the third degree identity, for example

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

4

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$$

: hence, in order to solve the equation of the third degree generally

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$$

it is necessary to find a function of  $(a+b+c)$ ,  $(ab+ac+bc)$  & of  $abc$ , which is equal either to  $a$ ,  $b$ , or  $c$ .

On reflecting on the second degree, considered in the above manner, and according to which we may know how to produce the third degree general solution, I have been led to think that this condition could be fulfilled by a function of this form

$$\frac{1}{3} \left[ a+b+c + \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right],$$

where I assume the cubes expanded, and that  $r'$ ,  $r''$  are the values, together with unity, which satisfy the equation  $r^3 = 1$ .

It is easy to see that we have  $r' + r'' = -1$ ,  $r'r'' = 1$ ; from which we derive  $r'^2 = r''$ ,  $r''^2 = r'$ , etc. and we find that the cube of  $a + r'b + r''c$ , is

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b);$$

but this expression

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b)}$$

which indicates nothing other than the quantity from which the cube arises, is an ambiguous expression, since this cube consists of just as many quantities  $r(a + r'b + r''c)$  as there are numbers satisfying the condition  $r^3 = 1$

It is hence easy to prove that if the above function, by means of these different ways in which the two ambiguous quantities are found to be susceptible, at first shall be fulfilled in the same manner either by  $a$ ,  $b$ , or  $c$ . I see that this is actually true, since

$$\frac{1}{3} [a+b+c + (a+r'b+r''c) + (a+r''b+r'c)] = a.$$

$$\frac{1}{3} [a+b+c + r'(a+r'b+r''c) + r''(a+r''b+r'c)] = c.$$

$$\frac{1}{3} [a+b+c + r''(a+r'b+r''c) + r'(a+r''b+r'c)] = b.$$

Hence it is no more a question then of making the two cubes to be functions of  $(a+b+c)$ ,  $(ab+ac+bc)$  & of  $abc$  only: but as that will be impossible as long as the

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

5

letters  $a$ ,  $b$  &  $c$  cannot be interchanged among themselves, it is agreed to attend to this second condition separately.

We have  $r' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ,  $r'' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ; from which

$$(a+r'b+r''c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{1}{2}(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + a^2b + c^2b) \\ + 6abc + \frac{1}{2}(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)\sqrt{-3},$$

of which the quantity  $(a+r''b+r'c)^3$  only differs from the former because  $\sqrt{-3}$  is minus there.

It is

$$(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$$

only which changes value if we exchange the letters amongst themselves. Indeed on writing  $a$  for  $b$ , &  $b$  for  $a$ , we will have

$$(a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a),$$

and this is the only value different from the first, that the interchange of the letters may be able to produce: but we have learned above how to make a quantity which shall be indifferent to one or the other of two quantities, and in which further it will be unchanged on writing in turn the one for the other:  $u'$  &  $u''$  being these two quantities

$\frac{1}{2}[u' + u'' + \sqrt{(u' - u'')^2}]$  satisfies these two conditions: thus assuming

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b = u',$$

$$a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a = u'',$$

$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)^2}$  will be indifferently  $u'$  or  $u''$ , and will not change value at all, if we interchange the letters  $a$ ,  $b$  &  $c$  amongst themselves.

Now  $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ , which equals  $(a-b)(a-c)(b-c)$ , has the square

$$a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2 \\ - 2(a^4bc + b^4ac + c^4ab) - 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) \\ + 2(a^3b^2c + a^3c^2b + b^3a^2c + c^3a^2b + c^3b^2a) - 6a^2b^2c^2.$$

Therefore the second condition for the general resolution of the third degree is satisfied. As for the third and final condition, which is to substitute for all these

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

6

quantities, into those indifferent to interchanges of the letters between themselves, their values in ....

$(a + b + c)$ ,  $(ab + ac + bc)$  &  $abc$ , we will see at once that it is always very easy to be fulfilled.

IV. We see for the present for any degree, the essential condition for the general resolution being to find a function of the sum of the roots, of the sum of their products two at a time, of the sum of their products three at a time, etc, which shall be independent of any one of these roots, for which this investigation can be divided into three headings :

1.° *To find a function of the roots, for which it may be said in a certain sense, that it may be equal any of these desired roots .*

2.° *Put this function into a form such that further it shall remain the same on exchanging the roots amongst themselves.*

3.° *Substitute these values into the sum of these roots, the sum of their products two at a time, etc.*

On treating at first the third heading, which is the simplest.

V. I will write in the following :

(A) for  $a + b + c + \&c.$ ,  $(A^2)$  for  $a^2 + b^2 + c^2 + \&c.$

$(AB)$  for  $ab + ac + \&c.$   $(A^2B)$  for  $a^2b + b^2a + c^2a + \&c.$

$+ bc + \&c.$

$+ a^2c + b^2c + c^2b + \&c.$

$+ \&c.$

$+ \&c. + \&c. + \&c.$

& c.

In general I will indicate the sum of all the different terms which may result from that by  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots)$  for the capitals, A, B, C, &c., by means of all the possible substitutions of the small letters  $a, b, c, d, e$ , &c. in some order, and I will call these abbreviations the kinds of *combinations*, or simply *Types* [i.e. distinct kinds of permutations in more modern terms] .

Since the case where some of these exponents  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. of the Type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots)$  are equal to each other, leads to some special considerations, again I will adopt, at least in this article, another manner of noting, by means of which the number of equalities between these exponents may be able to be entered in a general manner into the expressions that I find.

I make  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon \dots) = \{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\dots\}$  and if, for example,  $\alpha = \beta = \gamma$ ,  $\delta = \epsilon$ , I will have

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

7

$$(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon \dots) = \{\alpha\alpha\alpha\delta\delta\dots\} = \{\alpha^3\delta^2\dots\}.$$

Hence the sense of this expression  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  is easy to grasp :

$$\begin{aligned}(A) &= \{1\}; (A^2) = \{2\}; (A^3 B^3) = \{3^2\}; \\(AB) &= \{1^2\}; (A^3) = \{3\}; (A^2 B^2 C^2 D) = \{2^3 1\}; \\(ABC) &= \{1^3\}; & \text{ \& c. } & \text{ \& c. } \\& & \text{ \& c. } & \end{aligned}$$

The functions which do not change value at all if we exchange the letters between them, evidently being some functions of the *types*; what we have proposed here then is reduced to finding the value of  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  in  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ ,  $\{1^4\}$ , &c.

The following formulas at first give the value of  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  in sums of powers  $\{\varpi\}$ ,  $\{\varpi'\}$ , &c., then the value in  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ , &c. of these sums of powers.

1.<sup>o</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , &c. remaining undetermined, &  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. being some positive whole numbers, or zero, if we may satisfy all the possible procedures for the following equations

$$\begin{aligned}a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + a'''\varepsilon''' + \dots &= n, \\b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \dots &= p, \\c'\varepsilon' + \dots &= q, \\&\text{\&c.}\end{aligned}$$

on taking only whole positive numbers for  $a'$ ,  $a''$ ,  $a''' \dots b'$ ,  $b'' \dots c' \dots \varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon''' \dots$ , or zero, the value of  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  in terms of the sums of powers, will contain all the different terms of the form

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots\}^{\varepsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \dots\}^{\varepsilon''} \times \{a'''\alpha + \dots\}^{\varepsilon'''} \dots$$

which may be able to arise ; and the numerical coefficient of any term

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots\}^{\varepsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \dots\}^{\varepsilon''} \times \{a'''\alpha + \dots\}^{\varepsilon'''} \dots$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

8

on assuming, in order to simplify

$$a' + b' + c' + \dots = A', \quad n + p + q + \dots = N.$$

$$a'' + b'' + \dots = A'', \quad \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \dots = E.$$

$$a''' + \dots = A''',$$

&c.

will become

$$\pm \frac{(1.2.3 \dots \overline{A'-2.A'-1})^{\varepsilon'} (1.2.3 \dots \overline{A''-1})^{\varepsilon''} (1.2.3 \dots \overline{A'''-1})^{\varepsilon'''} \dots}{(1.2.3 \dots \overline{a'-1.a'})^{\varepsilon'} (1.2 \dots a'')^{\varepsilon''} (1.2 \dots a''')^{\varepsilon'''} \dots (1.2 \dots b')^{\varepsilon'} (1.2 \dots b'')^{\varepsilon''} \dots (1.2 \dots c')^{\varepsilon'} (1.2 \dots c'')^{\varepsilon''} \dots (1.2.3 \dots \varepsilon') (1.2 \dots \varepsilon'') (1.2 \dots \varepsilon''') \dots}$$

the sign + having a place if  $(N + E)$  is even, and the sign - if it is odd.

For example,

$$\begin{aligned} \{\alpha^3 \beta^2\} &= \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1.2} \{3\alpha + 2\beta\} - \frac{1.2.3}{1.2.3} \{3\alpha + \beta\} \{\beta\} - \frac{1.2.3}{1.2.1.2} \{2\alpha + 2\beta\} \{\alpha\} \\ &\quad - \frac{1.2.1}{1.2.3.1.2} \{3\alpha\} \{2\beta\} - \frac{1.2.1}{1.2} \{2\alpha + \beta\} \{\alpha + \beta\} \\ &\quad - \frac{1.2.1}{1.2.1.2} \{\alpha + 2\beta\} \{2\alpha\} \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2.3.1.2} \{3\alpha\} \{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2} \{\alpha + \beta\} \{\alpha\} \{\beta\} - \frac{1}{1.2.1.2} \{2\alpha\} \{\alpha\} \{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2.1.2} \{\alpha + 2\beta\} \{\alpha\}^2 - \frac{1}{1.2} \{\alpha + \beta\} \{\alpha\}^2 \{\beta\} \\ &\quad + \frac{1.1}{1.2.1.2} \{2\alpha\} \{2\beta\} \{\alpha\} - \frac{1}{1.2.1.2.3} \{2\beta\} \{\alpha\}^3 \\ &\quad + \frac{1.1}{1.2} \{2\alpha\} \{\alpha + \beta\} \{\beta\} \\ &\quad + \frac{1^2}{1.2} \{\alpha + \beta\}^2 \{\alpha\} + \frac{1}{1.2.3.1.2} \{\alpha\}^3 \{\beta\}^2, \end{aligned}$$

and if on assuming  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , we will have

$$\begin{aligned}
 \{2^3 1^2\} &= 2\{8\} - \{7\}\{1\} + \frac{1}{6}\{6\}\{1\}^2 \\
 &\quad - \frac{3}{2}\{6\}\{2\} + \{5\}\{2\}\{1\} \\
 &\quad - \frac{1}{6}\{6\}\{2\} + \frac{1}{2}\{4\}\{2\}^2 \\
 &\quad - \{5\}\{3\} + \frac{1}{4}\{4\}\{2\}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}\{4\}^2 + \frac{1}{2}\{4\}\{3\}\{1\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\{3\}^2\{2\} \\
 &\quad - \frac{1}{4}\{4\}\{2\}\{1\}^2 + \frac{1}{12}\{2\}^3\{1\}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}\{3\}\{2\}^2\{1\} - \frac{1}{12}\{2\}^4
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 (A^2 B^2 C^2 DE) &= 2(A^8) - (A^7)(A) + \frac{1}{6}(A^6)(A)^2 \\
 &\quad - \frac{5}{3}(A^6)(A^2) + (A^5)(A^2)(A) \\
 &\quad - (A^5)(A^3) + \frac{3}{4}(A^4)(A^2)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}(A^4)^2 + \frac{1}{2}(A^4)(A^3)(A) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(A^3)^2(A^2) \\
 &\quad - \frac{1}{4}(A^4)(A^2)(A)^2 + \frac{1}{12}(A^2)^3(A)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}(A^3)(A^2)^2(A) - \frac{1}{12}(A^2)^4.
 \end{aligned}$$

2.<sup>o</sup> If we make the most general rational and whole function possible of dimension  $\varpi$ , with the quantities  $(A)$ ,  $(AB)$ ,  $(ABC)$  &c., or  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ , &c., or if we take all the different terms of the form  $\{1\}^{\varepsilon'}$ ,  $\{1^2\}^{\varepsilon''}$ ,  $\{1^3\}^{\varepsilon'''}$  ..... which can result from all the possible ways of satisfying the equation

$$\varepsilon' + 2\varepsilon'' + 3\varepsilon''' + \dots = \varpi,$$

$\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'''$  .... being whole positive numbers or zero, the value of  $\{\varpi\}$  is going to contain all these terms; and the numerical coefficient of some term

$$\{1\}^{\varepsilon'}, \{1^2\}^{\varepsilon''}, \{1^3\}^{\varepsilon'''} \dots$$

on assuming  $\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \dots = E$ , will be

$$\pm \frac{\varpi(1.2...\overline{E-1})}{(1.2...\varepsilon')(1.2...\varepsilon'')(1.2...\varepsilon''')\dots}$$

the sign + being in place if  $(\varpi + E)$  is even, and the sign - if odd.

For example,

$$\begin{aligned} \{5\} &= \frac{5.1.2.3.4}{1.2.3.4.5} \{1\}^5 - \frac{5.1.2.3}{1.2.3} \{1\}^3 \{1^2\} + \frac{5.1.2}{1.2} \{1\} \{1^2\}^2 \\ &+ \frac{5.1.2}{1.2} \{1\}^2 \{1^3\} - \frac{5.1}{1} \{1^2\} \{1^3\} - \frac{5.1}{1} \{1\} \{1^4\} + \frac{5}{1} \{1^5\}, \end{aligned}$$

that is,

$$\begin{aligned} (A^5) &= (A)^5 - 5(A)^3(AB) + 5(A)(AB)^2 + 5(A)^2(ABC) \\ &- 5(AB)(ABC) - 5(A)(ABCD) + 5(ABCDE). \end{aligned}$$

Inspection of the attached Tables, which I consider easy to extend without explanation, and which appear to me to be interesting to continue, will be able to provide details of processes which are not my object here \*.

\* We were on the point of printing this Memoir, when the idea came to me to look for the general expression of a number taken somewhere in these Tables, or, what amounts to the same thing, on assuming the above, of which the numerical coefficient of the term

$$\{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}an} \times \{1^2\}^{a_1} \{1^3\}^{a_2} \{1^4\}^{a_3} \dots \{1^{n+1}\}^{an},$$

in the value of the product

$$\{\overline{n+1}\}^{an} \dots \{4\}^{a_3} \{3\}^{a_2} \{2\}^{a_1} \{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}an}.$$

I have found that if we indicate this coefficient, which is a function of  $a_1, a_2, \dots, a_1, a_2,$  & c. by

$$\pm F \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \dots, an \\ a_1, a_2, a_3, \dots, an \end{matrix} \right),$$

the + sign having a place if

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

is an even number, and the sign - if it is odd, in order to determine the following formula, we will have (on supposing for simplicity

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

11

$$v+1-2\alpha_1-3\alpha_2-4\alpha_3-....-\overline{v+1}\alpha v = N,$$

$$v-\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3-....-v\alpha v = N),$$

TABLE I. Mem. de l' Acad. R. des Sc. année , 1771 , page  
354....

|                                                                                              |  |                                                                                                                               |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1^2 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ |  | $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1^2 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 1 & -3 & +3 \\ 1 & & -3 \\ 1 & & 1 \end{matrix}$ |  |
|                                                                                              |  |                                                                                                                               |  |

The image contains three tables of mathematical identities, likely related to the symmetric group  $S_n$  and its representations. Each table shows the expansion of a product of cycle types (represented by curly braces) into a sum of cycle types.

**Table 1 (Top Left):** This table shows the expansion of products of cycle types for  $S_4$ . The header row lists cycle types:  $4$ ,  $31$ ,  $2^2$ ,  $21^2$ , and  $1^4$ . The body of the table shows the following identities:

$$\begin{aligned} \{4\} &= 1 - 4 + 2 + 4 - 4 \\ \{31\} &= 1 - 3 - 1 + 4 \\ \{2^2\} &= 1 - 3 + 2 \\ \{21^2\} &= 1 - 4 \\ \{1^4\} &= 1 \end{aligned}$$

**Table 2 (Top Right):** This table shows the expansion of products of cycle types for  $S_5$ . The header row lists cycle types:  $5$ ,  $41$ ,  $32$ ,  $31^2$ ,  $2^21$ ,  $21^3$ , and  $1^5$ . The body of the table shows the following identities:

$$\begin{aligned} \{5\} &= 1 - 5 + 5 + 5 - 5 - 5 + 5 \\ \{41\} &= 1 - 3 - 1 + 5 + 1 - 5 \\ \{32\} &= 1 - 3 - 1 + 5 - 5 \\ \{31^2\} &= 1 - 3 - 1 + 5 \\ \{2^21\} &= 1 - 3 + 5 \\ \{21^3\} &= 1 - 5 \\ \{1^5\} &= 1 \end{aligned}$$

**Table 3 (Bottom):** This table shows the expansion of products of cycle types for  $S_6$ . The header row lists cycle types:  $6$ ,  $51$ ,  $42$ ,  $41^2$ ,  $3^2$ ,  $321$ ,  $31^3$ ,  $2^3$ ,  $2^21^2$ ,  $21^4$ , and  $1^6$ . The body of the table shows the following identities:

$$\begin{aligned} \{6\} &= 1 - 6 + 9 - 2 + 6 - 12 + 3 - 6 + 6 + 6 - 6 \\ \{51\} &= 1 - 4 + 2 - 1 + 7 - 3 + 1 - 6 - 1 + 6 \\ \{42\} &= 1 - 2 - 2 + 4 - 3 + 2 + 2 - 6 + 6 \\ \{41^2\} &= 1 - 3 + 3 - 1 + 2 + 1 - 6 \\ \{3^2\} &= 1 - 3 + 3 + 3 - 3 - 3 + 3 \\ \{321\} &= 1 - 3 - 3 + 4 + 7 - 12 \\ \{31^3\} &= 1 - 3 - 1 + 6 \\ \{2^3\} &= 1 - 3 + 2 - 2 \\ \{2^21^2\} &= 1 - 4 + 9 \\ \{21^4\} &= 1 - 6 \\ \{1^6\} &= 1 \end{aligned}$$

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

13

[illegible]

14

TABLE III. *Mém. de l'Acad. R. de Sc. année 1771, page 374.*



M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

17

VI. Now looking for the general means of making a function of the roots, from which it shall be true in a certain sense that it shall be equal to any of these roots wished.

I say at first that the function

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} & \left[ a + b + c + \&c. + \sqrt[n]{(a + r'b + r''c + r'''d + \dots)^n} \right. \\ & + \sqrt[n]{(a + r'^2b + r''^2c + \dots)^n} + \dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \left. + \sqrt[n]{(a + r'^{n-1}b + r''^{n-1}c + \dots)^n} \right] \end{aligned}$$

may become equal without preference either to  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , or  $d$ , &c., on supposing the powers of  $n$  expanded and that  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  &c. are the values which resolve the equation  $r^n = 1$ , together with unity.

The examples put this proposition into all its light. Adding only that when  $n$  is a prime number  $2m+1$ , in order to obtain the rigorous values of  $r$  on supposing

$$r^n - 1 = r^{2m+1} - 1 = 0 = (r-1)(r^2 + x'r + 1)(r^2 + x''r + 1)(r^2 + x'''r + 1) \dots$$

we have the equation

$$\left. \begin{aligned} x^m - x^{m-1} + \overline{m-2}x^{m-3} - \frac{\overline{m-3}\overline{m-5}}{1.2}x^{m-5} + \&c. \\ - \overline{m-1}x^{m-2} + \frac{\overline{m-2}\overline{m-3}}{1.2}x^{m-4} - \frac{\overline{m-3}\overline{m-4}\overline{m-5}}{1.2.3}x^{m-6} \end{aligned} \right\} = 0,$$

the roots of which are  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$  &c. and which is always easy to resolve, as we will see hereafter by the calculation of the case where  $m = 5$ . If  $n$  is not a prime number, the simplifications are still very great, and offered without pain.

$$\begin{aligned} F \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, a_n \end{matrix} \right) &= \dots + \\ \frac{\overline{v+1}\overline{N+1}\overline{N+2}\overline{N+3}\dots\overline{N}}{(1.2.3\dots\alpha_1)(1.2.3\dots\alpha_2)\dots(1.2.3\dots\alpha_v)} & F \left( \begin{matrix} \overline{a_1 - \alpha_1}, \overline{a_2 - \alpha_2}, \dots, \overline{a_v - \alpha_v}, \overline{a_v + 1}, \overline{a_v + 2} \dots a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_v - 1, a_v + 1, a_v + 2 \dots a_n \end{matrix} \right) + \dots \end{aligned}$$

is a formula from which we can extract  $n$  equations on giving to  $v$  successively the numbers 1, 2, 3 ....  $n$  for its value ; the second member of each of these equations being the sum of just as many terms as some term in it can provide on taking for  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ....  $\alpha_v$ , either zero or some positive whole numbers, such that  $N$  is greater than, or  $= 0$ .

On considering this formula as an equation for the finite differences for several variables, in which the difference of each variable shall be equal to unity, I manage to sum together and to satisfy the conditions by a particular procedure of which I propose to render an account in one of these volumes following.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

18

The applications to the second and third degrees are found above: passing on to the fourth degree.

VII. Since  $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1)$ , the roots of  $r^4 = 1$  are  
1,  $-1 = r'$ ,  $\sqrt{-1} = r''$ ,  $-\sqrt{-1} = r'''$ , and it is required to prove that

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}] \end{aligned}$$

shall be equally indifferent either to  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , or  $d$ , on assuming the fourth powers be expanded : but that put in place, the indicated expression contains the four following values:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) + (a+b-c-d) + (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= a, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d - (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) + (a+b-c-d) - (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= b, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) - (a+b-c-d) - \sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= d, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d - \sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) - (a+b-c-d) + \sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= c. \end{aligned}$$

Hence, &c.

$$\text{VIII. } r^5 - 1 = (r - 1)(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1).$$

Now, if we have the four equations,

$$\begin{aligned} 1 + r' + r'' + r''' + r^{iv} &= 0, \\ r'r'' &= 1, \quad r'''r^{iv} = 1, \\ r''r''' &= r'; \end{aligned}$$

from which we deduce

$$\begin{aligned} r'r''' &= r^{iv}, \quad r''r^{iv} = r''', \\ r'r^{iv} &= r'', \\ r'^2 &= r''', \quad r''^2 = r^{iv}, \quad r'''^2 = r'', \quad r^{iv2} = r', \quad \&c. \end{aligned}$$

we will find the equation  $r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ , in order to determine either  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , or  $r^{iv}$ ,  $r$  being any one of these four quantities.

Hence the values which concurrently with unity resolve the equation  $r^5 = 1$  and which are  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , &  $r^{iv}$  satisfy the four equations which I have assumed at first, and those which are deduced from that ; hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+\sqrt[5]{(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e)^5} \\ +\sqrt[5]{(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)^5} \\ +\sqrt[5]{(a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)^5} \\ +\sqrt[5]{(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)^5}]. \end{aligned}$$

on supposing the fifth powers expanded out, contain the five values

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+ (a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ + (a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)+ (a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)+ (a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = a, \\ \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+ r'(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ + r'''(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)+ r^{iv}(a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)+ r''(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = c, \\ \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+ r''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ + r^{iv}(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)+ r'''(a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)+ r'(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = b, \\ \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+ r'''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ + r''(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)+ r'(a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)+ r^{iv}(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = e, \\ \frac{1}{5}[a+b+c+d+e+ r^{iv}(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ + r'(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)+ r''(a+r^{iv}b+r'''c+r'd+r''e)+ r'''(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = d. \end{aligned}$$

The five powers indicated are easy to evaluate by means of the system of equations between the product of any two of the values of  $r$ , and one of the third, such as it is above ; but it is required to observe that the same letters will continue to indicate the same numbers, and the three equations

$$1+r'+r''+r''' + r^{iv} = 0, \quad r'r'' = 1, \quad r'''r^{iv} = 1,$$

having a place, we will be able, because of the ambiguity of these numbers, assume  $r''.r''' = r^{iv}$  ; from which we will deduce

$$r'r''' = r'', \quad r'r^{iv} = r''', \quad r''r^{iv} = r', \quad r'^2 = r^{iv}, \quad r''^2 = r''', \quad r'''^2 = r', \quad r^{iv2} = r'';$$

the second system of equations which is true, just as the first, without being at the same time, and from which we will conclude the same things as above, although in the development of the fifth powers, it may lead to other values.

IX. Since  $r^6 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + r + 1)(r^2 - r + 1)$ , the six values of  $r$  in the equation  $r^6 = 1$  are 1, -1,  $\rho'$ ,  $\rho''$ ,  $-\rho'$ ,  $-\rho''$ ;  $\rho'$  &  $\rho''$  being the values which together resolve

with unity the equation  $\rho^3 = 1$ , which gives (art. III)

$\rho' + \rho'' = -1$ ,  $\rho'\rho'' = 1$ ,  $\rho'^2 = \rho''$ ,  $\rho''^2 = \rho'$ , &c., and it is required to prove that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho''f)^6}]. \end{aligned}$$

be equal indifferently either to  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , or  $f$ , on the sixth powers being expanded : but then the function contains the six values

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ +\rho' \\ -\rho' \\ +\rho'' \\ -\rho'' \end{array} \right\} (a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f) \\ & \left. \begin{array}{c} + \\ + \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho' \end{array} \right\} (a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho'f) + \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} (a-b+c-d+e-f) \\ & \left. \begin{array}{c} + \\ + \\ +\rho' \\ +\rho' \\ + \\ + \end{array} \right\} (a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f) + \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ +\rho'' \\ -\rho'' \\ +\rho' \\ -\rho' \end{array} \right\} (a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho'f) \Big] = \left. \begin{array}{c} a \\ b \\ e \\ f \\ c \\ d \end{array} \right\} \end{aligned}$$

hence, &c.

X.  $r^7 - 1 = (r-1)(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$ ; now if we have the six equations

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

21

$$\begin{aligned} 1 + r' + r'' + r''' + r^{iv} + r^v + r^{vi} &= 0, \\ r'r'' &= 1, \quad r'''r^{iv} = 1, \quad r^vr^{vi} = 1, \\ r''r''' &= r', \quad r^{iv}r^v = r'; \end{aligned}$$

from which we deduce

$$\begin{aligned} r'r''' &= r^v, \quad r''r^{iv} = r^{vi}, \quad r'''r^v = r^{iv}, \quad r^{iv}r^{vi} = r''', \\ r'r^{iv} &= r'', \quad r''r^v = r''', \quad r'''r^{vi} = r'', \\ r'r^v &= r^{vi}, \quad r''r^{vi} = r^v, \\ r'r^{vi} &= r^{iv}, \\ r'^2 &= r''', \quad r''^2 = r^{iv}, \quad r'''^2 = r^{vi}, \\ r^{iv2} &= r^v, \quad r^{v2} = r'', \quad r^{vi2} = r', \quad \&c. \end{aligned}$$

we would find  $r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ ,  $r$  being any one of the six quantities : thus the imaginary values of  $\sqrt[7]{1}$  satisfy all these equations; thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} [ &a + b + c + d + e + f + g + \sqrt[7]{(a + r'b + r''c + r'''d + r^{iv}e + r^vf + r^{vi}g)}^7 \\ &+ \sqrt[7]{(a + r'''b + r^{iv}c + r^{vi}d + r^ve + r''f + r'g)}^7 \\ &+ \sqrt[7]{(a + r^vb + r^{vi}c + r''d + r'e + r'''f + r^{iv}g)}^7 \\ &+ \sqrt[7]{(a + r^{vi}b + r^vc + r'd + r''e + r^{iv}f + r'''g)}^7 \\ &+ \sqrt[7]{(a + r^{iv}b + r'''c + r^vd + r^{vi}e + r'f + r''g)}^7 \\ &+ \sqrt[7]{(a + r''b + r'c + r^{iv}d + r''e + r^{vi}f + r^vg)}^7 ]. \end{aligned}$$

on assuming the seventh powers expanded, contain the seven values

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

22

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{7} [a+b+c+d+e+f+g+r'''] \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r' \\ +r'' \\ +r''' \\ +r^{iv} \\ +r^v \\ +r^{vi} \end{array} \right\} (a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e+r^vf+r^{vi}g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r''' \\ +r^{iv} \\ +r^{vi} \\ +r^v \\ +r'' \\ +r' \end{array} \right\} (a+r'''b+r^{iv}c+r^{vi}d+r^ve+r''f+r'g) \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^v \\ +r^{vi} \\ +r'' \\ +r' \\ +r''' \\ +r^{iv} \end{array} \right\} (a+r^vb+r^{vi}c+r''d+r'e+r'''f+r^{iv}g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^{vi} \\ +r^v \\ +r' \\ +r'' \\ +r^{iv} \\ +r''' \end{array} \right\} (a+r^{vi}b+r^vc+r'd+r''e+r^{iv}f+r'''g) \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^{iv} \\ +r''' \\ +r^v \\ +r^{vi} \\ +r' \\ +r'' \end{array} \right\} (a+r^{iv}b+r'''c+r^vd+r^{vi}e+r'f+r''g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r'' \\ +r' \\ +r^{iv} \\ +r''' \\ +r^{vi} \\ +r^v \end{array} \right\} (a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e+r^{vi}f+r^vg) = \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \\ b \\ e \\ d \\ g \\ f \end{array} \right\} .
 \end{aligned}$$

XI. This procedure is uniform, and for any prime number  $n$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , ..... being the imaginary values of  $\sqrt[n]{1}$ , we will have always a system of equations analogous to the preceding, on supposing the  $(n-1)$  equations

$$\begin{aligned} 1 + r' + r'' + r''' + \dots &= 0, \\ r'r'' &= 1, \quad r'''r^{iv} = 1, \quad r^vr^{vi} = 1, \quad r^{vii}r^{viii} = 1, \quad \&c. \\ r''r''' &= r', \quad r^{iv}r^v = r', \quad r^{vi}r^{vii} = r', \quad \&c. \end{aligned}$$

which will give all the others. This system will suffice to raise these powers indicated without impediment, and consequently to satisfy the object which occupies us here, since the rigorous values of all the roots of unity are easy to obtain successively, as we will see.

XII. There will be, when  $n$  is not a prime number, some simplifications in the above general form, which can be seen at once; for example,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}] \end{aligned}$$

contains the four values of *article VII*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho''f)^6}]. \end{aligned}$$

contains the six values of *article IX*; &c.

But still there are some special simpler forms for these cases.

XIII. We can, for example, construct a quantity which may be indifferent to any one of the four determined quantities, by raising the other powers only to the squares, and as a consequence without using imaginary numbers, for

$$\frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt{(a+b-c-d)^2} + \sqrt{(a+c-b-d)^2} + \sqrt{(a+d-b-c)^2}]$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

24

contains the four values

$$\frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} (a+b-c-d) \left\{ \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} (a+c-b-d) \left\{ \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} (a+d-b-c) \right] = \begin{cases} a. \\ b. \\ c. \\ d. \end{cases}$$

XIV. We can construct a quantity which shall be indifferent to any one of six, without raising the other powers beyond five different cubes ; for  $\rho$  &  $\rho'$  being the imaginary values of  $\sqrt[3]{1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [ & a+b+c+d+e+f + \sqrt[3]{(a+b+\rho'c+d+\rho''e+f)}^3 \\ & + \sqrt[3]{(a+c+\rho'b+e+\rho''d+f)}^3 \\ & + \sqrt[3]{(a+d+\rho'b+f+\rho''c+e)}^3 \\ & + \sqrt[3]{(a+e+\rho'c+f+\rho''b+d)}^3 \\ & + \sqrt[3]{(a+f+\rho'd+e+\rho''b+c)}^3 ]. \end{aligned}$$

contains the six values

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

25

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} + \\ + \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho' \end{array} \right\} \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f] (a+b+\rho'\overline{c+d}+\rho''\overline{e+f}) \\
 & \left. \begin{array}{c} + \\ +\rho'' \\ + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \end{array} \right\} (a+c+\rho'\overline{b+e}+\rho''\overline{d+f}) \left. \begin{array}{c} + \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho' \\ +\rho'' \end{array} \right\} (a+d+\rho'\overline{b+f}+\rho''\overline{c+e}) \\
 & \left. \begin{array}{c} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho'' \end{array} \right\} (a+e+\rho'\overline{c+f}+\rho''\overline{b+d}) \left. \begin{array}{c} + \\ +\rho' \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ + \end{array} \right\} (a+f+\rho'\overline{d+e}+\rho''\overline{b+c}) = \left\{ \begin{array}{l} a. \\ b. \\ c. \\ d. \\ e. \\ f. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

XV. Should you wish to know, if only by raising the other powers to five different squares, you would still be able to make a quantity which would be indifferent to one of the six? here is the means of assuring that.

It will be necessary that each letter, except  $a$ , is found in the sum of the root quantities, twice greater and three times less, in order to satisfy the case where all its roots will have the  $+$  sign as here :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + (a+b+c-d-e-f) \\
 & + (a+b+d-c-e-f) + (a+c+f-b-d-e) \\
 & + (a+d+e-b-c-f) + (a+e+f-b-c-d)] = a;
 \end{aligned}$$

but when we arrange the signs  $+$  &  $-$  before the roots, in the manner to have  $+1$  in all, for the coefficient of one of the letters to be other than  $a$ , it will be necessary that the coefficients  $+1$  &  $-1$ , continue by themselves to be half for all the other letters, of which the sum must be zero ; hence it is necessary that any two letters cannot have the three signs of the same kind in the five root quantities: in fact, these conditions are impossible to fulfill.

For the rest, which is impossible if we wish to limit ourselves to five squares, there is nothing so easy if we raise to ten, for

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

26

$$\begin{aligned} & \frac{1}{11}[2(a+b+c+d+e+f)+\sqrt{(a+b+c-d-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+d-c-e-f)^2}+\sqrt{(a+b+e-c-d-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+f-c-d-e)^2}+\sqrt{(a+c+d-b-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+c+e-b-d-f)^2}+\sqrt{(a+c+f-b-d-e)^2} \\ & +\sqrt{(a+d+e-b-c-f)^2}+\sqrt{(a+d+f-b-c-e)^2} \\ & +\sqrt{(a+e+f-b-c-d)^2}] \end{aligned}$$

includes the six values of  $a, b, c, d, e, f$ .

XVI. We can make a quantity which is indifferent to one of eight different values, without raising the other powers other than to seven different squares, for

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}[a+b+c+d+e+f+g+h)+\sqrt{(a+b+c+d-e-f-g-h)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+e+f-c-d-g-f)^2}+\sqrt{(a+b+g+h-c-d-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+c+h-b-d-f-g)^2}+\sqrt{(a+c+f+g-b-d-e-h)^2} \\ & +\sqrt{(a+d+e+g-b-c-f-h)^2}+\sqrt{(b+c+e+g)^2}], \end{aligned}$$

contains the eight values  $a, b, c, d, e, f, g, h$ .

XVII. We can make a quantity which shall be indifferent to one of nine values, without raising the other powers higher than eight different cubes, for  $\rho'$  &  $\rho''$  being the imaginary values of  $\sqrt[3]{1}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9}[a+b+c+d+e+f+g+h+k \\ & +\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'd+e+f+\rho''g+h+k)^3}+\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'g+h+k+\rho''d+e+f)^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'b+f+k+\rho''c+e+h)^3}+\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'c+e+h+\rho''b+f+k)^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'b+e+g+\rho''c+d+k)^3}+\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'c+d+k+\rho''b+e+g)^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'c+f+g+\rho''b+d+h)^3}+\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'b+d+h+\rho''c+f+g)^3}] \end{aligned}$$

contains the nine values  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ .

XVIII. In general, we will find the forms of this kind always, on taking at first, simplified as in *article XII*, the roots of the same denomination, on exchanging there in all manners the letters amongst themselves, then making a sum of all the results; for each

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

27

elementary form is composed always from this sum, and often, from different parts of this sum.

The modifications which appear to multiply the number of forms of the roots, are only complications of the elementary forms; as when we take two or more terms of the root ; and because we raise their sum to a certain power, in order to put that next under the root of the exponent as this power ; when we make the product of two terms, in order to divide that next by one of these, &c. &c. And I say that for the fourth degree, for example, there are essentially no different forms, apart from the two in *articles VII* or *XII* & *XII* ; that for the sixth, there are only the three of *articles IX* or *XII*, *XIV* & *XV*, &c. for the difference essentially is in the degree of the necessary roots.

Without entering into longer discussions on this subject, because the object of the special forms is less to facilitate the general solution than to simplify the results there, we will content ourselves by observing that by means of everything that has preceded this, our principle question is found reduced to the second of the three main topics which we have distinguished there (*article IV*); that's to say to transform the quantity into a function of the types (*article V*) of which we can say that it equals such of the roots as we wish.

Taking for example an instance of the third degree.

XIX. We have seen (*articles III* & *V*) which is equally either  $a$ ,  $b$ , or  $c$ , presents itself at once in the form

$$\frac{1}{3}[(A) + \sqrt[3]{((A^3) - \frac{1}{2}(A^2B) + 6(ABC) + \frac{1}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3})} \\ + \sqrt[3]{((A^3) - \frac{1}{2}(A^2B) + 6(ABC) - \frac{1}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3})}],$$

and in order to have the whole in terms of a function of *types*, it is only necessary to take, in place of

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

the root of its square

$$(A^4B^2) - 2(A^4BC) - 2(A^3B^3) + 2(A^3B^2C) - 6(A^2B^2C^2).$$

The Tables of *article V* give the excess, and the equation proposed being

$$Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

if we make

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' \\ \Delta'' \end{array} \right\} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[ -2N^3 + 3^2MNP - 3^3M^2Q \right.} \\ \left. + \right\} 3M\sqrt{-3}(N^2P^2 - 2^2MP^3 - 2^2N^3Q + 2.3^2MNPQ - 3^3M^3Q^3) \left. \right],$$

the resolved formula will become

$$x = \frac{1}{3M} \left[ \begin{array}{c} -N + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\} \Delta' + \begin{array}{c} + \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\} \Delta'' \Big],$$

the known and most simple formula possible, as the following observations prove.

XX. We must always be able to distinguish the different roots from each other uniquely, in the general value which includes them all, on multiplying each root by the different roots of unity, of the same exponent as this root; from which it follows that the general formula of the third degree can only include roots of the second degree : the addition of the roots in the sum of the values which added together must give zero ; thus it is required of the three roots.

It is required that in each root, all the imaginary parts must become zero when  $a = b = c$ , since then we must find  $x = \frac{1}{3}(A) = -\frac{N}{3M}$ , without any ambiguity.

It is necessary that  $a^3$ ,  $b^3$  &  $c^3$  must have the same coefficient, since for example  $a^3$  is of the same difficulty to be obtained from the types as  $a$  à ... & c.

Since all these conditions require that we have under the square root, the imaginary numbers of which the cube is 1, we see that it is impossible to avoid in the in the solution of the third degree, which we call the *irreducible* case.

It will be easy to extend and to generalize these observations.

XXI. We have proven (*article XIII*) that

$$\frac{1}{4}[(A) + \sqrt{(a+b-c-d)^2} + \sqrt{(a+c-b-d)^2} + \sqrt{(a+d-b-c)^2}]$$

contains the four values  $a, b, c, d$ , if we assume the squares expanded. These square are, to wit,

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} (a+b-c-d)^2 \\ (a+c-b-d)^2 \\ (a+d-b-c)^2 \end{array} \right\} = (A^2) - 2(AB) + 4 \left\{ \begin{array}{l} ab+cd \\ ac+bd \\ ad+bc \end{array} \right. \\ & = (A^2) - \frac{2}{3}(AB) + \frac{4}{5} \left\{ \begin{array}{l} 2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc), \\ 2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd), \\ 2(ad+bc) - (ab+cd) - (ac+bd), \end{array} \right. \end{aligned}$$

On exchanging the letters between themselves, in all ways possible, in

$$2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc)$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

29

we find only the three values

$$\begin{aligned} 2(ab + cd) - (ac + bd) - (ad + bc) &= u' \\ 2(ac + bd) - (ad + bc) - (ab + cd) &= u'' \\ 2(ad + bc) - (ab + cd) - (ac + bd) &= u'''; \end{aligned}$$

but by *article III*

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{(ab + cd + r'\overline{ac + bd} + r''\overline{ad + bc})^3} \\ &+ \sqrt[3]{(ab + cd + r''\overline{ac + bd} + r'\overline{ad + bc})^3}, \end{aligned}$$

on assuming the cubes expanded, they will become indifferently either  $u'$ ,  $u''$ , or  $u'''$ .

The first of these cubes is

$$\begin{aligned} &(A^3B^3) - \frac{1}{2}(A^3B^2C) + 6(A^3BCD) + 6(A^2B^2C^2) - 3(A^2B^2CD) \\ &+ \frac{1}{2}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\sqrt{-3}; \end{aligned}$$

the other only differs because it is less by  $\sqrt{-3}$  : now as the square of the product of the differences between the roots is a function of *types*, the solution only depends on the propositions of *article V*.

The proposed equation being

$$Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

$$\& \left. \begin{array}{l} \Delta' \\ \Delta'' \end{array} \right\} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2P^3 - 3^2NPQ + 3^3MQ^2 + 3^3N^2R - 2^33^2MPR)}$$

$$+ \left. \begin{array}{l} \\ - \end{array} \right\} 3\sqrt{-3} \left[ \begin{array}{ccc} N^2P^2Q^2 & -2^2N^2P^3R & -3^3N^4R^2 \\ -2^2MP^3Q^2 & +2^4MP^4R & +2^43^2MN^2PR^2 \\ -2^2N^3Q^2 & +2.3^2N^3PQR & -2^7M^2P^2R^2 \\ +2.3MNPQ^3 & -2^4.5MNP^2QR & -2^6.3M^2NQR^2 \\ -3^3M^2Q^4 & -2.3MN^2Q^2R & +2^8M^3R^3 \\ & +2^4.3^2M^2PQ^2R \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} u' \\ u'' \\ u''' \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\} \Delta' + \left. \begin{array}{l} + \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\} \Delta''$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

30

or rather  $u'$ ,  $u''$  &  $u'''$  being the three roots of the equation

$$u^3 + 3(-P^2 + 3NQ - 2^2 \cdot 3MR)u + (-2P^3 + 3^2 NPQ - 3^3 MQ^2 - 3^3 N^2 R + 2^3 \cdot 3^2 MPR) = 0,$$

we have

$$u = \frac{1}{2^2 M} \left[ -N \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu') \right. \\ \left. \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu'') \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu'''),$$

and if in place of these two roots, we take the root of the square of their sum, the whole will depend only on  $u'$ .

XXII. If we take the form of the article XII, namely,

$$\frac{1}{4} [(A) + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^2} + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}]$$

we will have  $(a+b-c-d)^2$  by the preceding article ; and as for the two fourth powers, if we make

$$\Phi = 3^2(A^4) - 2^2 3(A^3 B) - 2 \cdot 3^7(A^2 B^2) + 2^2 \cdot 23(A^2 BC) - 2^2 3 \cdot 23(ABCD) - 2^2[3(A^2) - 2AB]u' + 2^2 7u'^2,$$

$u'$  having the same value as in the preceding article, we will have

$$\left\{ \begin{matrix} (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4 \\ (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3^2} \Phi \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2^2(a-b)(c-d)[(a-b)^2 - (c-d)^2] \sqrt{-1}; \end{matrix} \right.$$

now making

$$\Psi = 2^2(A^2 B^2) - 2^2(A^2 BC) + 2^2 3(ABCD) - u'^2,$$

we have

$$[(a-b)(c-d)]^2 = \frac{1}{3}\Psi$$

$$[(a-b)^2 - (c-d)^2]^2 = \frac{1}{3^2}(\Phi + 2^2 3\Psi);$$

where, by means of the propositions of article V, the following formula results,  $\Phi$  &  $\Psi$  being, namely,

$$\Phi = 3^2 N^4 - 2^4 3 M N^2 P - 2^5 M^2 P^2 + 2^5 3^2 M^2 N Q - 27 \cdot 3^2 M^3 R$$

$$- 2^2 M (3 N^2 - 2^3 M P) u' + 2^3 7 M^2 u'^2.$$

$$\Psi = 2^2 P^2 - 2^2 3 N Q + 2^4 3 M R - u'^2.$$

$$x = \frac{1}{2^2 M} \left[ -N \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} (3 N^2 - 2^3 M P + 2^2 M u') \right.$$

$$\left. \begin{matrix} + \\ - \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \sqrt[4]{\frac{1}{3^2}} (\Phi + 2^2 M \sqrt{-3} \Psi (\Phi + 2^2 3 M^2 \Psi))$$

$$\left. \begin{matrix} + \\ - \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \sqrt[4]{\frac{1}{3^4}} (\Phi - 2^2 M \sqrt{-3} \Psi (\Phi + 2^2 3 M^2 \Psi))].$$

XXIII. For the equation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

for example, which contains the imaginary values of  $\sqrt[5]{1}$ , we will have, by the first formula,

$$r = \frac{1}{4} \left[ -1 \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{5} \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} \begin{matrix} + \\ - \\ - \\ + \end{matrix} \right\} \sqrt{-5 - 2\sqrt{5}} \right]$$

and by the second,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

32

$$r = \frac{1}{4} \left[ -1 \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} + \\ \sqrt{5} \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{5} \begin{matrix} + \\ - \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{5(-3+4\sqrt{-1})} \begin{matrix} + \\ - \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{5(-3+4\sqrt{-1})} \right\}.$$

[Some of this material is covered in Olaf Neumann's chapter in *Leonard Euler: Life work and Legacy*, Cyclotomy: From Euler through Vandermonde to Gauss. Pub. by Elsevier, 2007/2008.]

XXIV. Before passing on to the fifth degree, it is necessary to explain a new abridged notation which renders our expressions more concise, and will provide for us the procedures of calculus more expedite than those of algebra. This notation is convenient for certain quantities of a systematic form in which these which I call types are resolved, and to which the function is reduced always, which is indifferent to such of the roots as one would wish.

I will call the abridged expressions of these quantities *partial types*. These are series of terms making part of the expansion of the same *type*, of which the fundamental property is that if, in a certain exchange between the letters, another term results which shall be in the same sequence, it does not result for others, any term of which shall not be included there; of such a kind that this exchange does not produce any other change: and which on the contrary, if it shall result in a term which may not be included, it shall not be one of the results.

I assume, for example,

$$[\alpha \underset{\text{II}}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma}] = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\gamma b^\alpha c^\beta + a^\beta b^\gamma c^\alpha,$$

that's to say that  $[\alpha \underset{\text{II}}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma}]$  represents the sum of all the different terms that we can form on keeping always  $a, b$  &  $c$ , in the alphabetic order, taking for the exponent of the first term the numbers  $\alpha, \beta$  &  $\gamma$  in the same order in which they are written, deducing each following term from the preceding one, on taking the successive exponents in the following order, the *last*, the *first*, the *second*; the order of succession sufficiently indicated by these characteristics I, II, III, in the expression  $[\alpha \underset{\text{II}}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma}]$ , and from which we can deduce only three terms, since continuing always, on returning from the fourth to the first.

From which it follows :

$$[\alpha \underset{\text{II}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\beta}] = a^\alpha b^\gamma c^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma + a^\gamma b^\beta c^\alpha,$$

and as a consequence, only assuming in the expansion of the type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$  in terms of  $a, b$  &  $c$ , we have

$$(A^\alpha B^\beta C^\gamma) = [\alpha \underset{\text{II}}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma}] + [\alpha \underset{\text{II}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\beta}].$$

Similarly it is easy to deduce

$$\begin{aligned}
 [\alpha \beta \gamma \delta] &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha, \\
 [\alpha \delta \beta \gamma] &= a^\alpha b^\delta c^\beta d^\gamma + a^\delta b^\beta c^\gamma d^\alpha + a^\beta b^\gamma c^\alpha d^\delta + a^\gamma b^\alpha c^\delta d^\beta, \\
 [\alpha \gamma \delta \beta] &= a^\alpha b^\gamma c^\delta d^\beta + a^\delta b^\alpha c^\beta d^\gamma + a^\beta b^\delta c^\gamma d^\alpha + a^\gamma b^\beta c^\alpha d^\delta, \\
 [\alpha \beta \delta \gamma] &= a^\alpha b^\beta c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\beta d^\alpha, \\
 [\alpha \gamma \beta \delta] &= a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\delta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\alpha + a^\beta b^\delta c^\alpha d^\gamma + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\beta, \\
 [\alpha \delta \gamma \beta] &= a^\alpha b^\delta c^\gamma d^\beta + a^\gamma b^\alpha c^\beta d^\delta + a^\beta b^\gamma c^\delta d^\alpha + a^\delta b^\beta c^\alpha d^\gamma,
 \end{aligned}$$

from which it follows assuming  $a, b, c$  &  $d$ , in the expansion of the type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$  we have only

$$\begin{aligned}
 (A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta) &= [\alpha \beta \gamma \delta] + [\alpha \delta \beta \gamma] + [\alpha \gamma \delta \beta] \\
 &\quad + [\alpha \beta \delta \gamma] + [\alpha \gamma \beta \delta] + [\alpha \delta \gamma \beta].
 \end{aligned}$$

It is necessary to observe, before going any further, that in these laws I have taken here, I have a particular intention. The two parts  $[\alpha \beta \gamma]$  &  $[\alpha \gamma \beta]$  of this type are such that they can only be changed reciprocally into each other by the exchanges we can make in the value of each, between the letters  $a, b$  &  $c$ ; likewise I have subjected to this property the six parts into which I have apportioned  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$ :

hence it is necessary, to obtain the quantity  $[\alpha \beta \gamma]$  in types, to make a function which shall be indifferent to one of these two values  $[\alpha \beta \gamma]$  &  $[\alpha \gamma \beta]$ , and likewise, to obtain in types the quantity  $[\alpha \beta \gamma \delta]$ , it will be necessary to make a function which is indifferent to each of the six values

$$\begin{aligned}
 [\alpha \beta \gamma \delta], [\alpha \delta \beta \gamma], [\alpha \gamma \delta \beta], \\
 [\alpha \beta \delta \gamma], [\alpha \gamma \beta \delta], [\alpha \delta \gamma \beta],
 \end{aligned}$$

This is only to satisfy this particular view, by which it has been necessary to divide the type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$  into parts where the characteristics I, II, III, & IV may find themselves in a different order.

On following this procedure, we will have :

$$\begin{aligned}
 [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon + a^\delta b^\varepsilon c^\beta d^\gamma e^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\varepsilon d^\beta e^\delta \\
 &\quad + a^\beta b^\delta c^\alpha d^\varepsilon e^\gamma + a^\varepsilon b^\gamma c^\delta d^\alpha e^\beta \\
 [\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma] &= a^\alpha b^\varepsilon c^\delta d^\beta e^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\varepsilon d^\delta e^\alpha + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\varepsilon e^\beta \\
 &\quad + a^\varepsilon b^\beta c^\alpha d^\gamma e^\delta + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha e^\varepsilon \\
 [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta] &= a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\varepsilon e^\delta + a^\varepsilon b^\delta c^\gamma d^\beta e^\alpha + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma e^\varepsilon \\
 &\quad + a^\gamma b^\varepsilon c^\alpha d^\delta e^\beta + a^\delta b^\beta c^\varepsilon d^\alpha e^\gamma \\
 [\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta] &= a^\alpha b^\delta c^\varepsilon d^\gamma e^\beta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\varepsilon e^\alpha + a^\varepsilon b^\alpha c^\beta d^\delta e^\gamma \\
 &\quad + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta e^\varepsilon + a^\beta b^\varepsilon c^\gamma d^\alpha e^\delta
 \end{aligned}$$

[i.e. in  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , for the given initial arrangement of I, II, III, IV, V, the 1<sup>st</sup> index  $\rightarrow$  5<sup>th</sup> index, the 2<sup>nd</sup> index  $\rightarrow$  3<sup>rd</sup> index, the 3<sup>rd</sup> index  $\rightarrow$  4<sup>th</sup> index, & the 5<sup>th</sup> index  $\rightarrow$  2<sup>nd</sup> index, etc., keeping the same cyclic order.]

The sum of these four *partial types* is still a *partial type*, which, because of the connection between the exponents  $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  can be represented thus  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , on

considering that the first order of characteristics determine not one sequence of simple terms, but a sequence of *partial type* of the form  $[a \ b \ c \ d \ e]$  indicated by the second order of characteristics. However, because of the difficulties of printing, I shall substitute here, by that more familiar notation, the following which can suffice for this treatise: I shall have

$$[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] = [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma] + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta] + [\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta]$$

& similarly,

$$\begin{aligned}
 [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] &= [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] + [\alpha \varepsilon \gamma \delta \beta] + [\alpha \gamma \delta \beta \varepsilon] + [\alpha \delta \beta \varepsilon \gamma] \\
 [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] &= [\alpha \beta \delta \varepsilon \gamma] + [\alpha \varepsilon \beta \gamma \delta] + [\alpha \gamma \varepsilon \delta \beta] + [\alpha \delta \gamma \beta \varepsilon]
 \end{aligned}$$

If we assume further

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

35

$$\begin{aligned} [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] &= [\alpha \beta \gamma \varepsilon \delta] + [\alpha \delta \varepsilon \beta \gamma] + [\alpha \gamma \beta \delta \varepsilon] + [\alpha \varepsilon \delta \gamma \beta] \\ [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] &= [\alpha \beta \delta \gamma \varepsilon] + [\alpha \delta \gamma \varepsilon \beta] + [\alpha \gamma \varepsilon \beta \delta] + [\alpha \varepsilon \beta \delta \gamma] \\ [\alpha \beta \varepsilon \delta \gamma] &= [\alpha \beta \varepsilon \delta \gamma] + [\alpha \delta \beta \gamma \varepsilon] + [\alpha \gamma \delta \varepsilon \beta] + [\alpha \varepsilon \gamma \beta \delta] \end{aligned}$$

we will have

$$\begin{aligned} (A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon) &= [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \beta \varepsilon \delta \gamma] + [\alpha \beta \delta \varepsilon \gamma] \\ &\quad + [\alpha \beta \gamma \varepsilon \delta] + [\alpha \beta \delta \gamma \varepsilon] + [\alpha \beta \varepsilon \delta \gamma] \end{aligned}$$

and the six *partial types* which compose this sum, will be such that they can only be converted into each other reciprocally, if we exchange in the value of each, the letters  $a, b, c, d, e$ , between themselves: in such a way so that one of these *partial types* is obtained in types, it will be necessary to make a function which shall be the one indifferent to these six.

These examples suffice to understand the algorithm in question.

XXV. When  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  are determined numbers, if there are some equal to each other, it may happen that substituting into these short-hand formulas and into their values, we can find there the value of the terms which do not differ: for example, we find, on substituting into one of the preceding formulas ,

$$\begin{aligned} (\text{i.e. } [\alpha \beta \gamma \delta] &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha, ) \\ [2 \ 2 \ 1 \ 1] &= a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2; \end{aligned}$$

nevertheless in following at once the law indicated by the law of the characteristics I, II, III, IV, we should have stopped, after the first two terms.

To avoid any ambiguity in this regard, I will assume that in the expansion of the *partial types*, since in these of the same kinds, it is never found that the terms differ amongst themselves, & have no other coefficient but unity.

Hence, for example,  $[2 \ 2 \ 1 \ 1]$  will represent only the two terms  $a^2 b^2 c d + a b c^2 d^2$ , and the result of the substitution into the formula  $[\alpha \beta \gamma \delta]$  when  $\alpha = \beta = 2, \gamma = \delta = 1$ , will be  $+2[2 \ 2 \ 1 \ 1]; \&c.$

The case where some of the exponents  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  are zero, produces nothing of interest; hence

$$\begin{aligned} [2 \ 1 \ 0 \ 0] &= a^2 b^1 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^2 d^1 + a^1 b^2 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^1 d^2 = a^2 b + c^2 d + a b^2 + c d^2, \\ [2 \ 0 \ 0 \ 2] &= a^2 d^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2. \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

36

XXVI. We can, by means of the following operations, find the product of two *partial types* in which the order between the characteristics is or ought to be conforming.

For example, let the product be asked, of  $\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix}$  by  $\begin{smallmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix}$ ; I write 7040 four times, and above the four permutations of 2100 indicated by the order, of the characteristics, as follows :

$$\begin{array}{cccc} 2100 & 0021 & 1200 & 0012 \\ 7040 & 7040 & 7040 & 7040 \end{array}$$

I add the numbers which are found above each other, and I say, for the product,

$$\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 9 & 1 & 4 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 7 & 0 & 6 & 1 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 8 & 2 & 4 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 7 & 0 & 5 & 2 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{smallmatrix}.$$

This example will suffice to apply the same procedure to all the cases, if the reductions, when there are some, may not exceed one or two particular considerations.

Let the product of  $\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix}$  by  $\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix}$  be proposed; I make

$$\begin{array}{ccccc} 31100 & 00113 & 13010 & 01031 \\ 10022 & 10022 & 10022 & 10022 \end{array}$$

from which

$$\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{smallmatrix};$$

but, in this product, the two *partial types*  $\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  &  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  each represent five different terms, in place of which  $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  &  $\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  may represent the same five terms.

In order to make these kinds of reductions, in calculating, I assume, *partial types* of this form  $\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  I have before me or in memory, the order of the permutation which here is

$$12345, 45231, 31524, 24153, 53412,$$

which is indicated by  $\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$ .

This sequence allows me to see that  $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  is the same thing as  $\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$ , and that  $\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$  is not yet the same thing; for, to find an equivalent of  $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{smallmatrix}$ , in which 0 occupies here the third place, occupies the first, I choose 31524, and it serves me here to call the numbers in this order :

0 which is the 3<sup>rd</sup>.

2 which is the 1<sup>st</sup>.

2 which is the 5<sup>th</sup>.

3 which is the 2<sup>nd</sup>.

3 which is the 4<sup>th</sup>.

Likewise, in order to find an equivalent of  $[2 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3]$ , in which 0 which here occupies the second, shall occupy the first, I choose 24153, which serves to call the numbers in this order :

0 which is the 2<sup>nd</sup>.

2 which is the 4<sup>th</sup>.

2 which is the 1<sup>st</sup>.

3 which is the 5<sup>th</sup>.

3 which is the 3<sup>rd</sup>.

& hence for the others.

We have then, after having ordered and reduced,

$$\begin{array}{c} [1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2] \quad [3 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] = [4 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2] + [5 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0] \\ \text{V IV I II III} \quad \text{V IV I II III} \quad \text{V IV I II III} \quad \text{V IV I II III} \\ + 2[0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] + [5 \ 3 \ 1 \ 0 \ 1]. \\ \text{V IV I II III} \quad \text{V IV I II III} \end{array}$$

Finally, the product shall be proposed of  $[2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$  by  $[2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$  ;

I make

$$\begin{array}{cccccc} 21101 & 01112 & 12110 & 10211 & 11021 \\ 21110 & 21110 & 21110 & 21110 & 21110, \end{array}$$

and I must conclude

$$\begin{array}{c} [2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0] \quad [2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = [4 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1] + 5[2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2] \\ \text{V III IV I II} \quad \text{V III IV I II} \quad \text{V III IV I II} \quad \text{V III IV I II} \\ + [0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] + [2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3] + [2 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1]; \\ \text{V III IV I II} \quad \text{V III IV I II} \quad \text{V III IV I II} \end{array}$$

because as a consequence of article XXV,  $[2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$  represents only a single term.

We will calculate the product  $[\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \varepsilon] \times [a \ b \ c \ d \ e]$  in an analogous manner; &c. and hence between all the other *partial types* of the same form : the above details must suffice for all these cases.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

38

Usually I shall write, in the following, the characteristics I, II, III, etc. only under one of the terms, where their order will be consistent in all.

XXVII. We have seen (*article III*) that in the form where the function is presented in a form which is at once indifferent either to  $a$ ,  $b$ , or  $c$ , there remains a quantity in which it is not indifferent to the interchange of the letters between themselves; this quantity is

$$a^2b + b^2c + ac^2 - a^2c - ab^2 - bc^2$$

or  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{bmatrix}$ , which depends on the second degree.

We have seen likewise (*article XXI*) that in the form where the function is shown at once which is indifferent to either  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , or  $d$ , the quantity remains

$$2(ab + cd) - (ac + bd + ad + bc) = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix},$$

which depends on the third degree ; and not of the sixth, although of the form  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$ , because, in its particular values of  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  which are in place,

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$  &  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta & \gamma \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$  do not differ.

Passing to the fifth degree.

XXVIII. If we make

$$\begin{aligned} (a + r'b + r''c + r'''d + r^{iv}e)^5 &= \Delta'^5 \\ (a + r''b + r'c + r^{iv}d + r'''e)^5 &= \Delta''^5 \\ (a + r'''b + r^{iv}c + r''d + r'e)^5 &= \Delta'''^5 \\ (a + r^{iv}b + r'''c + r'd + r''e)^5 &= \Delta^{iv5} \end{aligned}$$

this we will have (*article VIII*), for the function which equals indifferently either  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , or  $e$ ,

$$\frac{1}{5}[(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}].$$

Raising the fifth powers indicated, on making use of the first system of equations between the  $r$  (*article VIII*) we have, if we assume

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

39

$$\begin{aligned}
 & 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} = u', \\
 & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + 2.3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 2^2 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \varphi', \\
 & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & + 2.3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2^2 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \varphi'', \\
 & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & + 2.3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 2^2 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi''', \\
 & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + 2.3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2^2 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi^{iv},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r'\varphi' + 5r''\varphi'' + 5r'''\varphi''' + 5r^{iv}\varphi^{iv} \\
 \Delta''5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r''\varphi' + 5r'\varphi'' + 5r^{iv}\varphi''' + 5r'''\varphi^{iv} \\
 \Delta'''5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r'''\varphi' + 5r^{iv}\varphi'' + 5r''\varphi''' + 5r'\varphi^{iv} \\
 \Delta^{iv}5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r^{iv}\varphi' + 5r'''\varphi'' + 5r'\varphi''' + 5r''\varphi^{iv}
 \end{aligned}$$

or, on using the simplest values of  $r$ , from article XXIII,  
& to simplify on making

$$\begin{aligned}
 & (A^5) - \frac{5}{2^2}(A^4B) - \frac{5}{2}(A^3B^2) - 5(A^3BC) \\
 & - \frac{3 \cdot 5}{2}(A^2B^2C) - 3 \cdot 5(A^2BCD) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) = M
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \Delta^5 \\ \Delta''5 \\ \Delta'''5 \\ \Delta^{iv}5 \end{array} \right\} = M + \frac{5^2}{2} u' \begin{array}{l} + \\ + \\ - \\ - \end{array} \left\{ \frac{5}{2^2} (\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv}) \sqrt{5} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \left\{ \frac{5}{2^2} (\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv}) \sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \left\{ \frac{5}{2^2} (\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv}) \sqrt{-5 - 2\sqrt{5}} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Now  $u'$  is of the form  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$  which depends (*article XXIV*) on a particular equation of the sixth degree, and we are going to see that the square of  $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})$ , as well as the quantity which is indifferently either  $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2$ , or  $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2$ , only contains the *partial types* of this form.

We shall be able to show this *à priori*: for

$$\begin{aligned} (\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2 &= \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} \\ &\quad - 2(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv} + \varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi''') + 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv}); \\ \left. \begin{aligned} (\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2 \\ (\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2 \end{aligned} \right\} &= \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} - 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv}) \\ &\quad + \left. \begin{aligned} + \\ - \end{aligned} \right\} 2\sqrt{(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv} - \varphi'\varphi^{iv} - \varphi''\varphi''')^2} \end{aligned}$$

and the partial types which contain  $\varphi'$ , each being compared to  $[\alpha \gamma \beta \delta \varepsilon]$ , these corresponding of  $\varphi''$  will become  $[\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta]$ ;

those of  $\varphi'''$  will become  $[\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma]$ ;

those of  $\varphi^{iv}$  will become  $[\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta]$ ;

from which it follows that  $\varphi'\varphi''$  will be of the form  $[a \ b \ c \ d \ e] + [a \ c \ b \ e \ d]$

which is a *partial type*,  $\varphi''\varphi^{iv}$ , being  $[a \ e \ d \ b \ c] + [a \ d \ e \ c \ b]$ ;

because  $\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv}$  being of the form  $\varphi'\varphi''$ ,  $\varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi'''$  will be that of  $\varphi''\varphi^{iv}$ ; &c.

It suffices to indicate here this manner of demonstration. On making the calculation entirely according to that, we will find

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

41

$$\begin{aligned} \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} = & \left[ \begin{array}{ccccc} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} \right] \\ & + 2^2 [72010] + 2^3 3 [53020] + 2^4 5 [43201] \\ & + 2^3 [70111] + 2^3 3 [53002] + 2^4 5 [43012] \\ & + 2^2 [64000] + 2^3 [53200] + 2^2 5^2 [43102] \\ & + 2^2 3 [63100] + 2^3 7 [53110] + 2^3 3 \cdot 5 [43120] \\ & + 2^2 [63001] + 2^4 3 [53011] + 2^3 5^2 [43111] \\ & + 2^4 [62020] + 2^3 3^2 [51022] + 2^2 3^2 5 [40222] \\ & + 2^3 3 [62011] + 2^4 3 [51220] + 2^3 3 \cdot 5^2 [42121] \\ & + 2^3 3 [62110] + 2^3 3 \cdot 5 [52111] + 2^2 5 [10333] \\ & + 2^4 [62101] + 2^3 5 [24040] + 2^3 5^2 [03232] \\ & + 2^3 [54001] + 2^2 5 [04141] + 2^4 5^2 [23131] \\ & + 2 [54100] + 2^2 5 [43030] + 2^3 3 \cdot 5^2 [31222] \\ & + 2^4 [54010] + 2^4 5 [43210] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} = & \left[ \begin{array}{ccccc} 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array} \right] \\ & + 2 \cdot 3 [72001] + 2^2 \cdot 19 [53101] + 2^3 5^2 [43021] \\ & + 2^4 [63010] + 2^2 \cdot 3^2 7 [51202] + 2^3 3 \cdot 5^2 [42211] \\ & + 2^4 [62200] + 3^2 \cdot 5 [24400] + 2^2 3 \cdot 5 \cdot 7 [03322] \\ & + 2^4 5 [61111] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [04411] + 2^5 5^2 [23311] \\ & + 5 [55000] + 2^2 3 \cdot 5 [43300] + 2^3 3^2 5^2 [22222] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} \\ \varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi''' \end{array} \right\} = \begin{array}{ccccc} 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & + 2 [73000] + 2^4 [54100] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [42013] \\ & + 2 [70021] + 2 \cdot 7 [52030] + 2^3 3 \cdot 5 [43210] \\ & + 2^2 [71002] + 2^4 [50032] + 3 \cdot 5 [24040] \\ & + 2^2 [71110] + 2^2 \cdot 7 [53020] + 3^2 5 [04114] \\ & + 2 [60040] + 2^3 \cdot 5 [53011] + 2 \cdot 3 \cdot 5 [43003] \\ & + 2 [63100] + 2^2 \cdot 11 [51013] + 2^3 5^2 [43111] \\ & + 2^3 [61030] + 2^4 \cdot 3 [52210] + 2 \cdot 3 \cdot 5^2 [42022] \\ & + 2 \cdot 5 [62002] + 2 \cdot 3 \cdot 11 [52102] + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 [42121] \\ & + 2 \cdot 3^2 [61021] + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 [51121] + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 [13033] \\ & + 2 \cdot 11 [62011] + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 [43102] + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 [03232] \\ & + 2 \cdot 13 [62110] + 2^2 \cdot 5^2 [41032] + 2^4 \cdot 5^2 [23113] \\ & + 3^2 [54001] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [42130] + 2^3 3 \cdot 5^2 [32221] \\ & + 13 [51004] \end{aligned}$$

From this last value, where all the terms are of the form  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , we will extract

$\varphi' \varphi''' + \varphi'' \varphi^{iv}$ , on taking only the *partial type*  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta]$ , &

$\varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi'''$ , on taking the other  $[\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta] + [\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma]$ : hence

$$\begin{aligned} \varphi' \varphi''' + \varphi'' \varphi^{iv} &= [81010] + [80101] \\ &+ 2[73000] + 2[70300] + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi''' &= [81001] + [80110] \\ &+ 2[70003] + 2[70030] + \&c. \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

43

and calculating  $(\varphi' \varphi''' + \varphi'' \varphi^{iv} - \varphi' \varphi^{iv} - \varphi'' \varphi''')^2$ , we will find only the terms of the form  $[abcde]$ .

It appears certain to me that the squares ,

$(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2$ ,  $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2$  &  $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2$  will not even depend, in the same way as  $u'$ , either on  $[21100]$ , or on  $[12200]$ ; for we have

$$[31100] = (A)[21100] + [12200] - (A^2 B^2 C) - (A^2 BCD),$$

and it is easy to arrive at the identity equation,

$$\begin{aligned} & (A^8 B^2) + 2^2 (A^7 B^2 C) + 2^2 3 (A^7 BCD) + 2^2 (A^6 B^4) \\ & + 2^2 (A^6 B^3 C) + 2^2 5 (A^6 B^2 C^2) + 2^2 5 (A^6 B^2 CD) + \\ & + 2^3 (A^6 BCDE) + 2^3 (A^5 B^4 C) + 2^4 (A^5 B^3 C^2) + \\ & + 2 \cdot 29 (A^5 B^3 CDE) + 2 \cdot 3^3 (A^5 B^2 C^2 D) + 2 \cdot 61 (A^5 B^2 CDE) \\ & + 2 \cdot 13 (A^4 B^4 C^2) + 2^4 (A^4 B^4 CD) \\ & - 2 \cdot 3 (A^4 B^3 C^3) + 2 \cdot 13 (A^4 B^3 C^2 D) \\ & + 2^2 \cdot 5^2 (A^4 B^3 CDE) + 2 \cdot 3^2 5 (A^4 B^2 C^2 D^2) \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 23 (A^4 B^2 C^2 DE) + 2 \cdot 3 \cdot 13 (A^3 B^3 C^3 D) \\ & + 2^2 \cdot 5 (A^3 B^3 C^2 D^2) + 2^2 \cdot 103 (A^3 B^3 C^2 DE) \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 (A^3 B^2 C^2 D^2 E) - 2^2 \cdot 5 \cdot 17 (A^2 B^2 C^2 D^2 E^2) \\ & + 2 \cdot [21100] \{ 2 (A^5 B) - 2^2 (A^4 B^2) + 2 (A^4 BC) \\ & + 3 (A^3 B^3) - 13 (A^3 B^2 C) - 2^3 \cdot 3 (A^3 BCD) \\ & - 2^2 \cdot 3 \cdot 5 (A^2 B^2 C^2) - 61 (A^2 B^2 CD) + 2^3 \cdot 7 (A^2 BCDE) \} \\ & - 2^2 [12200] \{ (A^5) - 2^2 \cdot 5 (A^2 B^2 C) - 2^2 \cdot 5 (A^2 BCD) \\ & - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 (ABCDE) \} - 2 [21100]^2 \{ 2 \cdot 3 (A^2) + 17 (AB) \} \\ & - 2^4 \cdot 5 (A)[21100][12200] - 2^2 \cdot 5^2 [12200]^2 \\ & = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2}. \end{aligned}$$

Thus the sum of the squares of  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , &  $\varphi^{iv}$  depends only on  $[21100]$  and on  $[12200]$ , as do these of their first powers; and I believe that we will find similar equations for the sum of the cubes, and for these of the fourth powers ; from which, by the *articles V & XXI*, we shall have

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

44

$(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv})$ ,  $(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv})$  &  $(\varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi''')$  in a function of  
 $[21100]$  and of  $[12200]$ : moreover I am convinced, that there exist two equations  
 $[21100]$  &  $[12200]$ , which will give, by elimination if it were necessary, these  
of the sixth degree in  $[21100]$  alone, and in  $[12200]$  alone; from which we could extract  
the one from these two *partial types* as a function of the other, should it be rational, on  
taking one of the former results from the elimination, should it be whole but irrational, on  
being resolved at once. See these following, between  $u$  &  $W$  (*article XXXI*). These  
equations being of rational functions, identically equal to zero, are easy to find; but I have  
not made the calculation. I am going to write only the following value :

$$\begin{aligned}
& -(A^7B^2C) - (A^7BCD) + 3 \cdot 5(A^6BCD) + 2 \cdot 7(A^6B^2C^2) \\
& + 29(A^6B^2CD) + 2 \cdot 3^2 \cdot 5(A^6BCDE) \\
& + 5(A^5B^5) + 3 \cdot 5(A^5B^4C) + 2 \cdot 3 \cdot 5(A^5B^3C^2) \\
& + 3^2 \cdot 5(A^5B^3CD) + 2^3 \cdot 13(A^5B^2C^2D) + 2^3 \cdot 13(A^5B^2CDE) \\
& + 2 \cdot 5 \cdot 7(A^4B^4C^2) + 2 \cdot 5 \cdot 11(A^4B^4CD) + 5 \cdot 19(A^4B^3C^3) \\
& + 2^3 \cdot 5 \cdot 7(A^4B^3C^2D) + 3 \cdot 5^2 \cdot 7(A^4B^3CDE) + 3 \cdot 5 \cdot 43(A^4B^2C^2D^2) \\
& + 5 \cdot 149(A^4B^2C^2DE) + 3 \cdot 5 \cdot 31(A^3B^3C^3D) \\
& + 5 \cdot 137(A^3B^3C^2D^2) + 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2(A^3B^3C^2DE) \\
& + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37(A^3B^2C^2D^2E) + 2 \cdot 5^2 \cdot 41(A^3B^2C^2D^2E^2) \\
& + [21100] \{ (A^6) + (A^5B) - 3 \cdot 5(A^4B^2) - 3 \cdot 5(A^4BC) \\
& + 3 \cdot 5(A^3B^3) - 5 \cdot 13(A^3B^2C) - 5^3(A^3BCD) \\
& - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5(A^2B^2C^2) - 5 \cdot 61(A^2B^2CD) - 5(A^2BCDE) \} \\
& + [12200] \{ 7(A^5) - 3 \cdot 5(A^4B) - 3 \cdot 5(A^3B^2) - 3 \cdot 5(A^3BC) \\
& - 2^2 \cdot 5 \cdot 7(A^2B^2C) - 2 \cdot 5 \cdot 23(A^2BCD) + 3 \cdot 5 \cdot 71(ABCDE) \} - 3 \cdot 5[02211]^2 \\
& \{ (A^4) - (A^3B) - 2(A^2B^2) + (A^2BC) - \\
& 3^2(ABCD) \} + 2 \cdot 5[21100]^2 \{ (A)^2 + 5(AB) \} \\
& + 2 \cdot 5 \cdot 11(A)[21100][12200] + 2 \cdot 5 \cdot 13[12200]^2 = \varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv},
\end{aligned}$$

from which it is seen that  $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2$  depends only on three *partial types*, of the  
form  $[\alpha\beta\beta\delta\delta]$ . For the remainder, the researches I have made on the equation of the

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

45

sixth degree, of which the general expression the roots would be  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , and the five other quantities which will result from that, if we exchange the letters  $a, b, c, d, e$  among themselves, not having led me up to the present to any easy way which depends on the equalities  $\gamma = \beta, \varepsilon = \delta$ , nor from the particular values of these exponents, this whole discussion has amounted to nothing here.

I will not set out my results on this particular equation, only to enter into some details about the sixth degree in general. It was necessary previously to say something about the equation which authors have called the *resolvent* or *reductant*.

XXIX. The resolvent of the fifth degree equation is an equation of the fourth, of which the four roots will be  $\Delta'^5, \Delta''^5, \Delta'''^5$  &  $\Delta^{iv5}$ . Since it is easy for us to make the sum of the values of these letters, the sum of their products two at a time, etc., and we know the coefficients of this equation.

That of the first term being unity, that of the second will be

$$-2^2 M - 2 \cdot 5^2 u',$$

the values given in the preceding section.

If we may make

$$\begin{aligned} & (A^4 B) + 2(A^3 B^2) + 2^2(A^3 BC) + 2 \cdot 3(A^2 B^2 C) \\ & + 2^2 \cdot 3(A^2 BCD) - 2u' = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{iv} = \Phi, \\ & (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2 \cdot 5u' = \Psi, \\ & \& \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} = V \end{aligned}$$

of which the value in *partial types* of the form  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$  is found above, the coefficient of the third term will be

$$2 \cdot 3\Psi^2 - 3 \cdot 5\Phi\Psi + 5^2\Phi^2 - 5^3V.$$

Again, if we make

$$\varphi'^2 \varphi^{iv} + \varphi''^2 \varphi''' + \varphi'''^2 \varphi' + \varphi^{iv2} \varphi'' = U$$

which we will find to be composed also of *partial types* of the form  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , the coefficient of the fourth term will be

$$= 2^2\Psi^3 - 3 \cdot 5\Phi\Psi^2 + 2 \cdot 5^3\Phi^2\Psi + 2 \cdot 5^3V\Psi + 5^3\Phi^2 - 5^4\Phi V - 5^4U.$$

The fifth and last term is finally

$$\left( (A^4) - (A^3 B) + (A^2 B^2) + 2(A^2 BC) - (ABCD) - 5[21100] \right)^5.$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

46

There are five other similar equations, which we may extract from that one, on exchanging in all manners the letters  $a, b, c, d, e$  between themselves; from which it follows that the product of these six equations shall be a complete equation of the 24<sup>th</sup> degree, which will have for coefficients only some rational functions from these of the proposed.

In order to use this equation of the 24<sup>th</sup> degree, it will be necessary to know how to remove the irrational factor which is the above resolvent, and we see that this separation depends, in the final analysis, on the facility of obtaining  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$  in types.

XXX. If we may make

$$\begin{aligned}(a+b+\rho'\overline{c+d}+\rho''\overline{e+f})^3 &= \Delta'^3 \\ (a+c+\rho'\overline{b+e}+\rho''\overline{d+f})^3 &= \Delta''^3 \\ (a+d+\rho'\overline{b+f}+\rho''\overline{c+e})^3 &= \Delta'''^3 \\ (a+e+\rho'\overline{c+f}+\rho''\overline{b+d})^3 &= \Delta^{iv3} \\ (a+f+\rho'\overline{d+e}+\rho''\overline{b+c})^3 &= \Delta^{v3},\end{aligned}$$

we will have this (*article XIV*), for the function which is indifferently equal either to  $a, b, c, d, e$ , or  $f$ :

$$\frac{1}{6}[(A)+\Delta'+\Delta''+\Delta'''+\Delta^{iv}+\Delta^v].$$

Raising the three powers indicated, if we assume

$$\begin{aligned}ab(a+b)+cd(c+d)+ef(e+f) \\ +2(a+b)(c+d)(e+f) &= u' \\ (a+b)(c+d)[(a+b)-(c+d)] \\ -(a+b)(e+f)[(a+b)-(e+f)] \\ +(c+d)(e+f)[(c+d)-(e+f)] &= w'\end{aligned}$$

or rather

$$\begin{aligned}u' &= [210000]_{\text{V VI II I III IV}} + 2[201010]_{\text{V VI II I III IV}} + 2[101001]_{\text{V VI II I III IV}} \\ w' &= [201000]_{\text{V VI II I III IV}} + [200100]_{\text{V VI II I III IV}} + 2[111000]_{\text{V VI II I III IV}} \\ &\quad - [200010]_{\text{V VI II I III IV}} - [200001]_{\text{V VI II I III IV}} - 2[110010]_{\text{V VI II I III IV}}\end{aligned}$$

we have

$$\Delta'^3 = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u' + \frac{3}{2}w'\sqrt{-3}.$$

$u'$  depends on the fifteenth degree, just as  $w'^2$ : but if we assume that  $u''$  &  $w''$  are these which become  $u'$  &  $w'$ , if we write

$ac$  &  $a + c$  for  $ab$  &  $a + b$ ,

$be$  &  $b + e$  for  $cd$  &  $c + d$ ,

$df$  &  $d + f$  for  $ef$  &  $e + f$ ,

that  $u'''$  &  $w'''$  are those which become likewise  $u'$  &  $w'$  if we write

$ad$  &  $a + d$  for  $ab$  &  $a + b$ ,

$bf$  &  $b + f$  for  $cd$  &  $c + d$ ,

$ce$  &  $c + e$  for  $ef$  &  $e + f$ ,

&c. or rather, on considering the terms of  $u'$  &  $w'^2$  as deduced from the *partial type*

$$\begin{aligned} & [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\gamma\delta] \\ & [\alpha\beta\gamma\delta\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\gamma\delta] \end{aligned}$$

if we assume for  $u''$  &  $w''^2$  the corresponding  $[\alpha\delta\beta\zeta\gamma\epsilon] + \&c.$

for  $u'''$  &  $w'''^2$  .....  $[\alpha\gamma\epsilon\beta\zeta\delta] + \&c.$

for  $u^{iv}$  &  $w^{iv2}$  .....  $[\alpha\zeta\delta\epsilon\beta\gamma] + \&c.$

for  $u^v$  &  $w^{v2}$  .....  $[\alpha\epsilon\zeta\gamma\delta\beta] + \&c.$

which gives

$$\Delta''^3 = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u'' + \frac{3}{2}w''\sqrt{-3},$$

$$\Delta'''^3 = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u''' + \frac{3}{2}w'''\sqrt{-3},$$

$$\Delta^{iv3} = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u^{iv} + \frac{3}{2}w^{iv}\sqrt{-3},$$

$$\Delta^{v3} = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u^v + \frac{3}{2}w^v\sqrt{-3},$$

the coefficients of the equations of the fifteenth degree which will have for roots

$u', u'', u''', u^{iv}, u^v$ , &  $w'^2, w''^2, w'''^2, w^{iv2}, w^{v2}$ , will depend on particular equations of the sixth degree, since there is six similar equations in  $u$  &  $w^2$  of the fifth degree, which are produced from the exchanges of the letters  $a, b, c, d, e, f$ , between themselves; as the following Tables prove,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

48

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cd$ | $ef$ |
| $ae$ | $fc$ | $db$ |
| $ad$ | $bf$ | $ce$ |
| $ac$ | $eb$ | $fd$ |
| $af$ | $de$ | $bc$ |

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cf$ | $de$ |
| $ad$ | $ec$ | $fb$ |
| $af$ | $be$ | $cd$ |
| $ac$ | $db$ | $ef$ |
| $ae$ | $fd$ | $bc$ |

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cd$ | $fe$ |
| $af$ | $ec$ | $db$ |
| $ad$ | $be$ | $cf$ |
| $ac$ | $fb$ | $ed$ |
| $ae$ | $df$ | $bc$ |

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $ce$ | $df$ |
| $ad$ | $fc$ | $eb$ |
| $ae$ | $bf$ | $cd$ |
| $ac$ | $db$ | $fe$ |
| $af$ | $ed$ | $bc$ |

the applications of which appear reasonable to me.

The coefficients of these equations of the fifth degree will be deduced from the following partial type,

$$\begin{aligned}
 & [\underset{\text{I V VI III IV II}}{a\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}] + [\underset{\text{I V VI III IV II}}{a\epsilon\beta\delta\zeta\gamma}] + [a\zeta\epsilon\delta\gamma\beta] + [a\gamma\zeta\delta\beta\epsilon] \\
 & + [\beta\gamma a\zeta\delta\epsilon] + [\epsilon\beta a\gamma\delta\zeta] + [\zeta\epsilon a\beta\delta\gamma] + [\gamma\zeta a\epsilon\delta\beta] \\
 & + [\gamma a\beta\epsilon\zeta\delta] + [\beta a\epsilon\zeta\gamma\delta] + [\epsilon a\zeta\gamma\beta\delta] + [\zeta a\gamma\beta\epsilon\delta] \\
 & + [\delta\epsilon\zeta a\beta\gamma] + [\delta\beta\epsilon a\gamma\zeta] + [\delta\gamma\beta a\zeta\epsilon] + [\delta\zeta\gamma a\epsilon\beta] \\
 & + [\epsilon\zeta\delta\gamma a\beta] + [\beta\epsilon\delta\zeta a\gamma] + [\gamma\beta\delta\epsilon a\zeta] + [\zeta\gamma\delta\beta a\epsilon] \\
 & + [\zeta\delta\epsilon\beta\gamma a] + [\epsilon\delta\beta\gamma\zeta a] + [\beta\delta\gamma\zeta\epsilon a] + [\gamma\delta\zeta\epsilon\beta a],
 \end{aligned}$$

which becomes a complete type, when we have  $\zeta = \epsilon = \delta$ .

Adding that we have the identity equations

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

49

$$\begin{aligned}
 [210000] &= (A)(ab + cd + ef) \\
 &\quad + (a + b)(c + d)(e + f) - (ABC), \text{ \&} \\
 w'^2 &= 4[ab + cd + ef - (AB)]^5 \\
 &\quad - 4(a + b)(c + d)(e + f)[27(a + b)(c + d)(e + f) + (A)^3] \\
 &\quad + [9(a + b)(c + d)(e + f) - (A)(ab + cd + ef - (AB))]^3
 \end{aligned}$$

and that it appears certain to me that two equations exist between

$$ab + cd + ef \text{ \& } (a + b)(c + d)(e + f),$$

analogous to these between  $u$  &  $w$  of the following article.

XXXI. If we use the form of the *article XV*, we will have

$$\begin{aligned}
 (a + b + c - d - e - f)^2 &= (A)^2 - 2(AB) \\
 &\quad + 4(ab + ac + bc + de + df + ef).
 \end{aligned}$$

Let  $ab + ac + bc + de + df + ef = u'$ ; as in exchanging between themselves the letters  $a, b, c, d, e, f$ , in all kinds of ways, nine changes will be made,  $u', u'', u''', u^{iv}$ , &c. shall be these ten values; each of these ten squares will depend on one of them; & if we calculate the coefficient of the equation of the tenth degree of which these are the roots, this equation

$$\begin{aligned}
 u^{10} + a_1 u^9 + a_2 u^8 + a_3 u^7 + \&c. &= 0, \\
 \& \\
 x^6 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t &= 0
 \end{aligned}$$

being proposed, we will find,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

50

$$a_1 = -2^2 p, \quad a_2 = 2 \cdot 3 p^2 - 2 \cdot 3 r,$$

$$a_3 = -2^2 p^3 - 3q^2 + 2 \cdot 13 pr + 2 \cdot 3 \cdot 11 r,$$

$$a_4 = p^4 - 2 \cdot 3 \cdot 7 p^2 r + 2^2 \cdot 3^2 qf + 3^2 p q^2 + r^2 - 2^2 \cdot 3^4 p t$$

$$\begin{aligned} a_5 = & -3^2 p^2 q^2 - 2 \cdot 3^2 p r^2 + 2 \cdot 3 \cdot 107 p^2 t \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 5 p^3 r - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 p q f + 2 \cdot 3 \cdot 19 r t \\ & + 2^2 \cdot 3 q^2 r - 3 \cdot 41 f^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 = & 3 p^3 q^2 + 2^3 \cdot 3 r^3 + 2 \cdot 3 \cdot 23 q^2 s \\ & + 3 q^4 - 2^2 \cdot 37 p^2 q f - 2 \cdot 241 \cdot p r t \\ & - 2^3 p^4 r - 2 \cdot 3 \cdot 23 q r f + 3 \cdot 43 t^2 \\ & - 2^3 \cdot 5 p q^2 r + 521 p f^2 \\ & + 7^2 p^2 r^2 - 2^7 5 p^3 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 = & -2 \cdot 3 p q^4 - 2^2 \cdot 3^2 q^3 f + 2^4 \cdot 47 p^2 r t \\ & + 2^2 \cdot 11 p^2 q^2 r + 2 \cdot 5 \cdot 47 p q r f + 2^4 \cdot 5 r^2 t \\ & - 2^4 \cdot 3 p^3 r^2 - 2 \cdot 449 p^2 f^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot 19 q f t \\ & - 2 \cdot q^2 r^2 + 2 \cdot 47 r f^2 - 2^7 3 p t^2 \\ & - 2^4 \cdot 5 p r^3 + 2^6 \cdot 5 p^4 t \\ & - 2^4 \cdot 5 p^3 q f - 2 \cdot 3 \cdot 61 p q^2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_8 = & 3 p^2 q^4 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 p q^3 f - 2^9 p^3 r t \\ & - 2^4 p^3 q^2 r - 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 p^2 q r f - 2 \cdot 3 q^2 r t \\ & - 2 \cdot 3 q^4 r - 2^3 \cdot 3 q r^2 f - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 p r^2 t \\ & + 2^4 q^4 r^2 + 2^2 \cdot 197 p^3 f^2 - 2^2 \cdot 3 \cdot 71 p q f t \\ & + 2 \cdot 3^2 p q^2 r^2 + 3 \cdot 17 q^2 f^2 + 2 \cdot 31 \cdot 1 f^2 t \\ & + 2^3 \cdot 11 p^2 r^3 - 2 \cdot 3 \cdot 41 p r f^2 + 2^7 \cdot 3 p^2 t^2 \\ & + 2^4 r^4 - 2^6 p^5 t + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 r t^2 \\ & + 2^4 p^4 q f + 2^2 3^4 p^2 q^2 t \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

51

$$\begin{aligned}
 a_9 = & -q^6 & -2^5 \cdot 11 p^4 f^2 + 2^9 r^t t \\
 & + 2 \cdot 7 p q^4 r & - 2 \cdot 43 p q^2 f^2 - 2^6 \cdot 11 p^2 q f t \\
 & - 2^5 p^2 q^2 r^2 & + 2^3 \cdot 3^3 p^2 r f^2 + 2^3 \cdot 3 q r f t \\
 & - 2^5 p^3 r^3 & - 2^3 r^2 f^2 & - 2^4 \cdot 7 p f^2 t \\
 & + 2^3 q^2 r^3 & - 2 \cdot 7 q f^3 & - 2^7 p^3 t^2 \\
 & - 2^5 p r^4 & - 2^5 \cdot 3 p^3 q^2 t & - 2^4 \cdot 3 q^2 t^2 \\
 & - 2^6 p^2 q^3 f & + 2^2 \cdot 3 q^4 t & - 2^8 p r t^2 \\
 & + 2^6 \cdot 5 p^3 q r f & + 2^7 p^4 r t & + 2^6 t^3 \\
 & - 2 \cdot 3 q^3 r f & + 2^3 p q^2 r t \\
 & + 2^3 \cdot 5 p q r^2 f & + 2^3 \cdot 7 p^2 r^2 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{10} = & p q^6 & + 2^6 p^5 f^2 & - 2^5 p r^3 t \\
 & - 2^3 p^2 q^4 & + 2^3 3^2 p^2 q^2 f^2 & + 2^6 \cdot 3 p^3 q f t \\
 & + 2^4 p^3 q^2 r & - 2^6 p^3 r f^2 & - 2^4 p q r f t \\
 & + q^4 r^2 & + 2 q^2 r f^2 & + 2^4 \cdot 3 p^2 f^2 t \\
 & - 2^3 p q^2 r^3 & + 2^3 p r^2 f^2 & - 2^3 r f^2 t \\
 & + 2^4 p^2 r^4 & + 2^3 \cdot 3 p q f^3 & 2^4 3 p q^2 t^2 \\
 & + 2^4 p^3 q^3 f & + f^4 & + 2^7 p^2 r t^2 \\
 & - 2^6 p^4 q r f & - 2^2 3 p q^4 t & + 2^4 r^2 t^2 \\
 & + 2^2 p q^3 r f & - 2^6 p^3 r^2 t & - 2^6 p t^3 \\
 & - 2^4 p^2 q r^2 f & - 2^3 q^2 r^2 t,
 \end{aligned}$$

and we will have

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

52

$$x = \frac{1}{6} \left[ \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ - \\ - \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u'' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u''' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{iv} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u^v - p)} \\ \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{vi} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u^{vii} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u^{viii} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{ix} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^x - p)} \right].$$

If we wish to use only one value of  $u$ , we will have

$$x^3 - x^2 \sqrt{(u - p)} + \Lambda x - \frac{1}{2} w + \sqrt{w^2 - 4t} = 0,$$

on assuming

$$\Lambda^2 - u\Lambda + v + \sqrt{(u - p)(w^2 - 4t)} = 0,$$

and the two preceding equations,

$$\begin{aligned} (w + q)^3 - (u - p)(u^2 - 4r)(w + q) + 4(u - p)^2(uw + 2f) &= 0, \\ (u^2 - 4r)(w + q)^2 + 16(u - p)^2(w^2 - 4t) \\ + 4(u - p)(w + q)(uw + 2f) - (u - p)(u^2 - 4r)^2 &= 0, \end{aligned}$$

where the value of  $w'$  in the function of the roots is  $abc + def$ .

XXXII. Hence we come to the above equation of the tenth degree, on assuming that the one proposed of the sixth degree is the product of two of the third degree. It is likewise for these of the fifth degree of *article XXX*, that we come upon, on assuming that to be the product from three with the second: hence the reason of the choice between the method of this *article XXX*, and that of *article XXXI*, depending on the nature of the roots, in the particular cases; though it is easily reduced to the first, for if we make

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

53

$$\begin{aligned}ac + ae + ce + bd + bf + df &= u'', \\ac + af + cf + bd + be + de &= u''', \\ad + ae + de + bc + bf + cf &= u^{iv}, \\ad + af + df + bc + be + ce &= u^v;\end{aligned}$$

the coefficient of the equation which will have these four roots, will be reduced to the same *partial type* as  $u'$  &  $w'^2$  of *article XXX*.

That of the second term, for example, will become

$$-2(AB) + 2(ab + cd + ef),$$

& thus for the others.

It is necessary to apply these thoughts to the equation of which the six roots shall be

$$\begin{aligned}[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon], [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta], [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma], \\[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta], [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon], [\alpha\beta\epsilon\delta\gamma].\end{aligned}$$

But before that we say a few words about certain simpler equations which have an affinity with that.

XXXIII. The equation which will have the six roots

$$\begin{aligned}a^\alpha b^\beta c^\gamma, a^\gamma b^\alpha c^\beta, a^\beta b^\gamma c^\alpha, \\a^\alpha b^\gamma c^\beta, a^\beta b^\alpha c^\gamma, a^\gamma b^\beta c^\alpha,\end{aligned}$$

for example, deduced from the processes of *articles XXX & XXXI*, for some equations of the first degree ; and if we make  $a^\alpha b^\beta c^\gamma = u'$ , &c., we will have

$$u'^2 - \Phi u + \Psi = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi^3 - (A^\alpha B^\beta C^\gamma)\Phi^2 + [(A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{2\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma})]\Phi \\ - [(A^{\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+2\gamma}) + 2(A^{\alpha+\beta+\gamma} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma})] = 0;\end{aligned}$$

$$\Psi^3 - (A^{2\alpha} B^{\beta+\gamma} C^{\beta+\gamma})\Psi^2 + (A^{2\alpha+\beta+\gamma} B^{2\alpha+\beta+\gamma} C^{2\beta+2\gamma})\Psi - (A^{2\alpha+2\beta+2\gamma} B^{2\alpha+2\beta+2\gamma} C^{2\alpha+2\beta+2\gamma}) = 0;$$

or equally

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

54

$$u^3 - \Gamma u^2 + \Lambda u - (A^{\alpha+\beta+\gamma} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0,$$

$$\Gamma^2 - (A^\alpha B^\beta C^\gamma) \Gamma + [(A^{2\alpha} B^{\beta+\gamma} C^{\beta+\gamma}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{2\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta})] = 0,$$

$$\Lambda^2 - (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma}) \Lambda + [(A^{2\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+2\gamma} C^{\alpha+\beta+2\gamma}) + (A^{2\alpha+\beta+\gamma} B^{2\alpha+\beta+\gamma} C^{2\beta+2\gamma}) + (A^{2\alpha+2\gamma} B^{\alpha+2\beta+\gamma} C^{\alpha+2\beta+\gamma})] = 0.$$

In the case of a substitution of the determined values for  $\alpha$ ,  $\beta$  &  $\gamma$ , we must not forget our assumptions. If, for example,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ; we will have

$$\Gamma^2 - (A^2 B) \Gamma + [(A^4 B C) + (A^3 B^3) + 3(A^2 B^2 C^2)] = 0,$$

because  $(A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta})$  represents three terms, and  $(A^2 B^2 C^2)$  only represents one.

The equation of which the six roots shall be

$$\begin{array}{ccc} [\alpha\beta\gamma\delta], & [\alpha\delta\beta\gamma], & [\alpha\gamma\delta\beta], \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \\ [\alpha\beta\delta\gamma], & [\alpha\beta\delta\gamma], & [\alpha\delta\gamma\beta], \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \end{array}$$

treated by the procedure of *article XXXI*, leads to an equation of the tenth degree, resolvable into two rational factors, one of the fourth degree, and the other of the sixth; but treated by that of *article XXX*, it leads to an equation of the first ; hence on assuming  $[\alpha\beta\gamma\delta] = u'$ , &c. &

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0$$

the coefficients of the equations of the third degree in  $\Phi$  &  $\Psi$  are of *types* ; that which is easy to prove initially, since  $[\alpha\beta\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma]$  is a *partial type*, and depends on the third degree, and because  $[\alpha\beta\gamma\delta] \times [\alpha\beta\delta\gamma]$  is of the form  $[abcd] + [abdc]$ .

XXXIV. It is required to note regarding the equation of which the six roots shall be  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ , &c. and that it becomes of the third degree, as the two of the preceding article, if we put there either  $a = b$ ,  $a = c$ , or  $b = c$ , &c.

It is required to note again, if in place of the first system of equations between the values of  $r$  (*article III*), we had used the second, we would have had  $[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  in place of  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ ; and that in the arrangement of the letters  $a, b, c, d, e$ , which come about by the first system,  $[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta]$  &  $[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$ , we would have by the second,  $[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon]$  &  $[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$ .

The coefficients of the equation which will have these six roots are easy to obtain in *types* : for by means of the remarks of *article XXVI*, we may seek there the sum of the squares of these roots, the sum of their cubes, &c. which requires only to calculate a

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

55

single one of the squares, or a single one of the cubes ; and we may deduce by *article V*, the sum of their products two at a time, three at a time, &c. The general solution of the fifth degree would be found to be returned by that, from the researches on a particular equation of the sixth, of which the coefficients shall be some rational functions from two of the proposed : then substituting into the equations of the 15<sup>th</sup> and of the 10<sup>th</sup> degree on which generally the sixth depends, which themselves will be calculated in the same manner; and if they may not be reduced, substituting again in these on which generally the 15<sup>th</sup> and of the 10<sup>th</sup> degree depend, &c. it would be necessary, if the fifth degree is resolvable generally, that we would arrive in the final analysis at equations which had rational factors, of the fourth degree or higher ; and that in use making some roots of these factors equal to zero, one would only be obliged to pass through equations of a degree less than the fifth. But we are able to follow the thread of these investigations, without calculating the same equations, on constantly substituting their roots for  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , &c. in the different elementary forms of the quantities which are indifferently one from six, from ten, from ten, &c. for the number of changing products possible by the different substitutions possible of one letter for another, will give us always the new state of the difficulty; and if something prevents us from exhausting all the possibilities by this means, it will only be the length of the calculation.

At first it is required to substitute our six roots into the *articles XXX & XXXI*.

1.° If, in *article XXX*, we make this substitution in the following order,

$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  for  $a$   
\* III IV II I

$[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta]$  for  $b$   
\* IV I II III

$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$  for  $c$   
\* II IV I III

$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  for  $d$   
\* III IV II I

$[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$  for  $e$   
\* II IV I III

$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$  for  $f$   
\* IV I II III

we will find that  $u'$  &  $w^2$  of this *article XXX* no longer depend on the fifteenth degree, but depend on the fifth: the equation which has for roots,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ ,  $u^{iv}$  &  $u^v$ , becomes entirely rational, and the other values of  $u$  depend on the 10<sup>th</sup> degree.

Hence the general resolution of the fifth degree is returned by that, to the resolution of one, or if you wish, to several particular equations of the same fifth degree: but the roots of these particular equations are themselves deduced from the same *partial types* as the roots of the proposed equation, that's to say from  $[a\ b\ c\ d\ e]$ , &c.

I II V III IV  
I II III V IV  
I IV V III II

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

56

2.° If we make these analogous substitutions, in the article XXXI, we find ten values of  $u$ , which themselves lead to the same *partial types* as the other quantities of the tenth degree depend on, of which I have just spoken ; ( their form is  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , & c.)

$\begin{matrix} \text{I} & \text{III} & \text{II} & \text{IV} & \text{V} \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} & \text{V} & \text{IV} \end{matrix}$

and an equation of the 126<sup>th</sup> degree, which we come upon on making a quantity which shall be one of ten, without raising other powers than squares, is resolved, in this case into six rational factors of the sixth degree of which the roots are deduced from the *partial types*  $[a b c d e]$ , & c. from where one is left, and into six rational factors of the

$\begin{matrix} * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{matrix}$

fifteenth degree of which the roots are deduced from the same *partial types* as the sums or the products two at a time of the preceding ; that is from  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , & c. Finally,

$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{V} & \text{IV} \\ \text{I} & \text{IV} & \text{V} & \text{III} & \text{II} \end{matrix}$

we come to an equation of the 945<sup>th</sup> degree where we arrive on making a quantity which shall be one of ten, with the fifth roots only, has not, for this case, any factor of a degree less than five, and all its roots are deduced from some of the above forms.

That is all that the calculation has taught me on this subject, and I have not enough faith for conjectures in so thorny a matter, to dare to indulge myself here. I may add that I have not found any *partial type* composed of five letters, which depends on the fourth degree, nor on the third : and I am convinced that none exists : but there is one which depends on the second degree; that is:

$$\begin{aligned} & [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \beta \delta \varepsilon \gamma] + [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] \\ & + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta] + [\alpha \gamma \varepsilon \delta \beta] + [\alpha \gamma \delta \beta \varepsilon] \\ & + [\alpha \delta \varepsilon \beta \gamma] + [\alpha \delta \beta \gamma \varepsilon] + [\alpha \delta \gamma \varepsilon \beta] \\ & + [\alpha \varepsilon \delta \gamma \beta] + [\alpha \varepsilon \gamma \beta \delta] + [\alpha \varepsilon \beta \delta \gamma] \end{aligned}$$

from which we deduce in general, that in the case of particular values of  $a, b, c, d, e, f$ , above, the *partial type*

$$\begin{aligned} & [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta] + [\beta \gamma \alpha \zeta \delta \varepsilon] + [\gamma \alpha \beta \varepsilon \zeta \delta] \\ & + [\alpha \zeta \varepsilon \delta \gamma \beta] + [\zeta \varepsilon \alpha \beta \delta \gamma] + [\varepsilon \alpha \zeta \gamma \beta \delta] \\ & + [\delta \zeta \gamma \alpha \varepsilon \beta] + [\zeta \gamma \delta \beta \alpha \varepsilon] + [\gamma \delta \zeta \varepsilon \beta \alpha] \\ & + [\delta \beta \varepsilon \alpha \gamma \zeta] + [\beta \varepsilon \delta \zeta \alpha \gamma] + [\varepsilon \delta \beta \gamma \zeta \alpha] \end{aligned}$$

depends on the second degree, as that of *article XXX*, to which it belongs, depends on the first.

For the rest, it may not perhaps suffice, to pronounce on the possibility of the general resolution, to confine oneself to the simple search of the form of the results; because in such a case where we know *à priori* how to arrive at the form  $[a b c d e]$ , it is necessary to know further, for example, if we will not have in all the terms, the equalities  $e = d = c$ ,

$\begin{matrix} * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{matrix}$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

57

which are of this *partial type*, a complete *type* ; it is necessary to know if these of the terms, where we may not have  $e = d = c$  shall not be taken under the form  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon] + 2[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]$ , of which these equalities  $\gamma = \beta, \varepsilon = \delta$ , are again a complete type ; &c. for these particular values of the exponents, their connections determined in the sequence of conforming *partial types* from where we had started, may be able to make these equalities have a place, at this point in the calculation.

XXXV. In the particular cases, where we have some equations between the roots, the method we have just set out may serve to resolve these, without passing through the general formulas of resolution.

The equation  $r^{11} - 1 = 0$  provides us with an example: it leads to this (*article VI*) ,

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

the roots of which being  $a, b, c, d, e$ , we will have by a very simple sequence from *article XI* .

$$\begin{aligned} a^2 &= -b + 2 & b^2 &= -d + 2 & c^2 &= -e + 2 & d^2 &= -c + 2 \\ ab &= -a - c & bc &= -a - e & cd &= -a - d & de &= -a - b \\ ac &= -b - d & bd &= -b - e & ce &= -b - c \\ ad &= -c - e & be &= -c - d & e^2 &= -a + 2 \\ ae &= -d - e, \end{aligned}$$

and all the *partial types* of the form  $[a \ b \ c \ d \ e]$ , will have one pure rational value; hence, on taking everywhere in the *article XXVIII*  $[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]$  in place of  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , we will find

$$u' = 6; \varphi' = 26, \varphi'' = -18, \varphi''' = -51, \varphi^{iv} = 4.$$

We have also  $(A^5) = 16, (ABCDE) = 1, (A) = 1$ ; where

$$x = \frac{1}{5}[1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}]$$

on substituting the values

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

58

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta'' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta''' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta^{iv} &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}})\end{aligned}$$

XXXVI. Since to resolve the equation

$$\left. \begin{array}{l} x^m - x^{m-1} \dots + \&c. \\ -m-1x^{m-2} \end{array} \right\} = 0,$$

it is only no more than to determine (*article VI*) the quantity which is indifferent to one of its roots, & nothing to do by which it shall be indifferent to the exchange of the roots between themselves, this resolution shall always be very easy for us.

Hence, of the three distinct conditions for the general resolution of the equations (*article IV*), the first (*article VI*) and the third (*article V*) are always rigorously in our power ; and we have to fulfill the second, a uniform and direct march (*article XXXIV*) which has no difficulty except for the inevitable length.



Mémoires de l'Académie Royale des Sciences 1771 [p. 364...]

MÉMOIRE

*SUR LA*

*RESOLUTION DES ÉQUATIONS.\**

Par M. VANDERMONDE.

ENTRE les Ouvrages faits depuis quelques années sur la résolution générale des Équations, les plus remarquables sont le Mémoire de M. Euler dans le *Tome IX des nouveaux Commetaires* de Pétersbourg, & celui de M. Bézout, dans le volume de cette Académie pour l'année 1765. Il suffit de consulter ces deux excellens Mémoires pour prendre une idée des progrès des analystes en cette matière, & des difficultés de tout genre qui restent à surmonter. Il m'a paru qu'une partie des difficultés pouvoit être imputée à la nature même des méthodes analytiques, les seules dont on ait fait usage; & j'ai pris le parti de tenter une autre voie. La méthode que je vais exposer, ne suppose l'introduction d'aucune inconnue, & à quelque instant que ce

\* Ce Mémoire a été lû dans le courant de Novembre 1770, & paraphé par M. de Fouchy le 28 du même mois; mais il m'a fallu attendre l'impression des Mémoires de 1771, parce

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

60

que je n'avois pas, en 1770, l'honneur d'être de l'Académie. Avant cette époque, il avoit paru un ouvrage intitulé *Meditationes algebraicae*, par M. Waring, ouvrage que je ne connoissois pas, & où, parmi des recherches très intéressantes sur les Équations, on trouve des théorèmes analogues à ceux de l'article V de ce Mémoire. Depuis, l'illustre M. de la Grange a publié dans les deux premiers volumes des nouveaux Mémoires de Berlin, sous le titre de *Réflexions sur la résolution algébrique des Équations*, une analyse des méthodes de M.<sup>rs</sup> Tschirnaus, Euler & Bézout, terminée par l'exposé d'une méthode particulière qu'il se propose d'appliquer aux degrés non résolus. On remarquera quelques conformités entre cet ouvrage & le mien, dont je ne puis être que flatté. Je dois avertir encore que le premier volume des Mémoires de l'Académie royale de Marine, renfermera des recherches ingénieuses déjà imprimées & distribuées, *sur la Résolution des Équations*, par M. de Marguerie; & que, dans le cinquième volume de la Société royale de Turin, on trouvera quelques vues générales la ns doute très-profondes, sur cette question par M. le Marquis de Condorcet

---

soit dans la marche du calcul, on n'a que des équations faciles à vérifier, en y exécutant les opérations indiquées; voilà son caractère particulier: c'est aux Géomètres à apprécier ses avantages.

I. On demande les valeurs générales les plus simples qui puissent satisfaire concurremment à une Équation d'un degré déterminé.

II. Développons d'abord, par un exemple, l'état de cette question.

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

est une équation identique, & par conséquent la condition

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

est satisfaite en faisant  $x = a$ , ou  $x = b$ ; mais

$$\left[ \frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2} \right]^2 - (a+b) \left[ \frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2} \right] + ab = 0,$$

est aussi une équation identique, indépendamment de l'extraction de la racine indiquée; d'où il suit que si l'on n'a voit pas connu cette quantité  $\frac{a+b+\sqrt{(a^2+b^2-2ab)}}{2}$  & qu'on eut voulu exprimer qu'on la cherchoit, la supposant  $x$ , on eut dû avoir

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0.$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

61

Or il est visible que cette expression  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$  qui signifie la quantité dont le carré est  $a^2 + b^2 - 2ab$ , est une expression ambiguë, puisque  $a^2 + b^2 - 2ab$  est indifféremment le carré d'autant de quantités  $r(a-b)$  qu'il y a de nombres qui satisfont à la condition  $r^2 = 1$ .

Voilà donc deux manières d'envisager l'équation

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0;$$

comme équation du second degré, & alors l'inconnue  $y$  représente une quantité ambiguë; comme produit de deux facteurs du premier degré, alors c'est l'équation qui est ambiguë, & l'inconnue  $y$  est susceptible de deux valeurs qui ne le sont point.

S'il étoit simplement question de résoudre l'équation

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0,$$

il faudroit choisir le dernier point de vue; mais si l'on en demande une racine qui ne soit composée que de ses coefficients  $(a+b)$  &  $ab$ , cette racine sera ambiguë nécessairement: car  $a$  étant une valeur de  $x$ , il faudra qu'on ait

$$a = \text{fonction} [(a+b), ab];$$

& comme en échangeant les lettres  $a$  &  $b$  entr'elles dans  $(a+b)$  & dans  $ab$ , ces quantités, ainsi que leur fonction quelle qu'elle soit, demeurent absolument les mêmes; l'échange supposé fait dans les deux membres, on aura encore

$$b = \text{fonction} [(a+b), ab].$$

Or ces deux conditions ne peuvent subsister séparément que par l'ambiguïté de la fonction.

Cette fonction est: par exemple,

$$\frac{1}{2} \left[ a+b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

qui se déduit facilement de là valeur ci-dessus parce que

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

Une quantité de laquelle on ne pourrait dire en aucun sens qu'elle égale  $a$ , ou qu'elle égale  $b$ , ne résoudroit point l'équation proposée; mais toute quantité de laquelle on peut le dire, en un certain sens, la résout: telle est, par exemple,

$$\frac{1}{2} \left[ a+b + \frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})} + \sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2} \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

qui la résout effectivement, parce qu'il y a un sens dans lequel le carré de

$\frac{\sqrt{(2\sqrt{-1})} + \sqrt{(-2\sqrt{-1})}}{2}$  égale 1; telle est encore

$$\frac{2ab}{a+b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}},$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

62

qui ne satisfait, qu'après la réduction à un dénominateur commun.

De ces trois valeurs générales, la plus simple est la première: mais l'on demande de plus les valeurs qui satisfont concurremment, c'est-à-dire, celles dont la somme est  $a + b$ , & le produit est  $ab$ . Il faut pour cela déterminer un sens dans lequel la fonction ambiguë égale  $a$ , par exemple; & trouver, cela posé, comment elle égale  $b$ , or cela est ici très-facile, puisque

$$\frac{1}{2} \left[ a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

n'est  $a$ , qu'en supposant que

$$\sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = a - b;$$

d'où il suit que c'est

$$\frac{1}{2} \left[ a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

qui, dans ce sens, est  $b$ .

III. Il faut prendre encore le troisième degré pour exemple

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$$

identiquement: donc, pour résoudre généralement l'équation du troisième degré

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$$

il faut trouver une fonction de

$$(a+b+c), \text{ de } (ab+ac+bc) \text{ \& de } abc,$$

qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ .

En réfléchissant sur le second degré, envisagé de la manière ci-dessus, & sur ce qu'on connoissoit du troisième, j'ai été conduit à penser que cette condition pouvoit être remplie par une fonction de cette forme

$$\frac{1}{3} \left[ a + b + c + \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right],$$

où je suppose les cubes développés, & que  $r'$ ,  $r''$  sont les valeurs qui satisfont, concurremment avec l'unité, à l'équation  $r^3 = 1$ .

Il est aisé de voir que l'on a  $r' + r'' = -1$ ,  $r'r'' = 1$ ; d'où l'on tire  $r'^2 = r''$ ,  $r''^2 = r'$ , etc. & l'on trouve que le cube de  $a + r'b + r''c$ , est

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b);$$

mais cette expression

$$\sqrt[3]{[a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r'(a^2b + b^2c + c^2a) + 3r''(a^2c + b^2a + c^2b)]}$$

qui n'indique autre chose que la quantité dont elle renferme le cube, est une expression ambiguë, puisque ce cube l'est d'autant de quantités  $r(a + r'b + r''c)$  qu'il y a de nombres

qui satisfont à la condition  $r^3 = 1$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

63

Il est donc facile de vérifier si la fonction ci-dessus, au moyen des différens sens dont s'y trouvent susceptibles les deux quantités ambiguës, remplit d'abord cette condition d'être indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ . Je vois que cela est en effet, puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}[a+b+c+(a+r'b+r''c)+(a+r''b+r'c)] &= a. \\ \frac{1}{3}[a+b+c+r'(a+r'b+r''c)+r''(a+r''b+r'c)] &= c. \\ \frac{1}{3}[a+b+c+r''(a+r'b+r''c)+r'(a+r''b+r'c)] &= b.\end{aligned}$$

Il ne s'agit donc plus que de faire que les deux cubes ne soient fonctions que de  $(a+b+c)$ ,  $(ab+ac+bc)$  & de  $abc$  : mais comme cela sera impossible tant qu'il ne sera pas indifférent d'y échanger les lettres  $a$ ,  $b$  &  $c$  entr'elles, il convient de s'occuper à part de cette seconde condition.

On a  $r' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ,  $r'' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ; d'où

$$\begin{aligned}(a+r'b+r''c)^3 &= a^3+b^3+c^3 - \frac{1}{2}(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+a^2b+c^2b) \\ &\quad + 6abc + \frac{1}{2}(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)\sqrt{-3},\end{aligned}$$

quantité dont  $(a+r''b+r'c)^3$  ne diffère que parce que  $\sqrt{-3}$  y est en moins.

Il n'y a là que

$$(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)$$

qui change de valeur si l'on échange les lettres entr'elles. En y écrivant en effet  $a$  pour  $b$ , &  $b$  pour  $a$ , on a

$$(a^2c+b^2a+c^2b-a^2b-b^2c-c^2a),$$

& c'est la seule valeur différente de la première, que les échanges de lettres puissent produire: mais nous avons appris ci-devant à faire une quantité qui fut indifféremment l'une de deux, & dans laquelle il fut de plus indifférent d'écrire l'une pour l'autre:

$u'$  &  $u''$  étant ces deux quantités,  $\frac{1}{2}[u'+u''+\sqrt{(u'-u'')^2}]$  satisfait aux deux conditions: donc supposant

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b &= u', \\ a^2c+b^2a+c^2b-a^2b-b^2c-c^2a &= u'',\end{aligned}$$

$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)^2}$  sera indifféremment  $u'$  ou  $u''$ , & ne changera point de valeur si l'on y échange entr'elles les lettres  $a$ ,  $b$  &  $c$ .

Or  $(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)$ , qui égale  $(a-b)(a-c)(b-c)$ , a pour carré

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

64

$$\begin{aligned} & a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2 \\ & - 2(a^4bc + b^4ac + c^4ab) - 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) \\ & + 2(a^3b^2c + a^3c^2b + b^3a^2c + c^3a^2b + c^3b^2a) - 6a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Voilà donc la seconde condition de la résolution générale du troisième degré satisfaite. Quant à la troisième & dernière qui est de substituer à toutes ces quantités, dans lesquelles il est indifférent d'échanger les lettres entr'elles, leurs valeurs en...  $(a+b+c)$ ,  $(ab+ac+bc)$  &  $abc$ , on verra dans l'instant qu'elle est toujours très-facile à remplir.

IV. On voit dès-à-présent que pour un degré quelconque, la condition essentielle de la résolution générale étant de trouver une fonction de la somme des racines, de la somme de leurs produits deux-à-deux, de la somme de leurs produits trois-à-trois, &c. qui soit indifféremment l'une quelconque de ces racines, cette recherche peut se partager en trois chefs :

1.<sup>o</sup> Trouver une fonction des racines, de laquelle on puisse dire, dans un certain sens, qu'elle égale telle de ces racines que l'on voudra.

2.<sup>o</sup> Mettre cette fonction sous une forme telle qu'il soit de plus indifférent d'y échanger les racines entr'elles.

3.<sup>o</sup> Y substituer les valeurs en somme de ces racines, somme de leurs produits deux-à-deux, etc.

Traisons d'abord ce troisième objet qui est le plus simple.

V. J'écrirai dans la suite

$$\begin{aligned} (A) & \text{ pour } a+b+c+\&c., (A^2) \text{ pour } a^2+b^2+c^2+\&c. \\ (AB) & \text{ pour } ab+ac+\&c. (A^2B) \text{ pour } a^2b+b^2a+c^2a+\&c. \\ & +bc+\&c. & +a^2c+b^2c+c^2b+\&c. \\ & +\&c. & +\&c.+\&c.+\&c. \\ & & \&c. \end{aligned}$$

En général par  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots)$  j'indiquerai la somme de tous les termes différens qui résulteroient de celui-là, au moyen de toutes les substitutions possibles des petites lettres  $a, b, c, d, e$ , &c. dans un ordre quelconque, aux grandes,  $A, B, C$ , &c. & j'appellerai ces expressions abrégées, *Types de combinaison* ou simplement *Types*.

Comme le cas où quelques-uns des exposans  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. du Type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots)$  sont égaux entr'eux, conduit à des considérations particulières, j'adopterai encore, du moins dans cet article, une autre façon de noter, au moyen de laquelle le nombre d'égalités entre ces exposans puisse entrer d'une manière générale dans les expressions que je cherche.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

65

Je fais  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon \dots) = \{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\}$  & si, par exemple,  $\alpha = \beta = \gamma$ ,  $\delta = \varepsilon$  j'aurai  
 $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon \dots) = \{\alpha\alpha\alpha\delta\delta\dots\} = \{\alpha^3\delta^2\dots\}$ .

Ainsi le sens de cette expression  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  est facile à laisir:

$$\begin{aligned}(A) &= \{1\} \quad (A^2) = \{2\} \quad (A^3 B^3) = \{3^2\} \\ (AB) &= \{1^2\} \quad (A^3) = \{3\} \quad (A^2 B^2 C^2 D) = \{2^3 1\} \\ (ABC) &= \{1^3\} \quad \& c. \quad \& c. \\ &\quad \& c.\end{aligned}$$

Les fonctions qui ne changent point de valeur si l'on y échange les lettres entr'elles, étant évidemment des fonctions de *types*; ce qu'on se propose ici se réduit donc à trouver la valeur de  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  en  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ ,  $\{1^4\}$ , &c.

Les formules suivantes donnent d'abord la valeur de  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  en sommes de puissances  $\{\varpi\}$ ,  $\{\varpi'\}$ , &c. puis la valeur en  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ , &c. de ces sommes de puissances.

1.<sup>o</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , &c. demeurant indéterminés, &  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. étant des nombres entiers positifs, ou zéro, si l'on satisfait de toutes les manières possibles à la suite d'équations

$$\begin{aligned}a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + a'''\varepsilon''' + \dots &= n, \\ b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \dots &= p, \\ c'\varepsilon' + \dots &= q, \\ &\&c.\end{aligned}$$

en ne prenant pour  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  ...  $b'$ ,  $b''$  ...  $c'$  ...  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'''$  .... que des nombres entiers positifs, ou zéro, la valeur de  $\{\alpha^n\beta^p\gamma^q\dots\}$  en sommes de puissances, contiendra tous les différens termes de la forme

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots\}^{\varepsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \dots\}^{\varepsilon''} \times \{a'''\alpha + \dots\}^{\varepsilon'''} \dots$$

qui en peuvent résulter; & le coefficient numérique du terme quelconque

$$\{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots\}^{\varepsilon'} \times \{a''\alpha + b''\beta + \dots\}^{\varepsilon''} \times \{a'''\alpha + \dots\}^{\varepsilon'''} \dots$$

en supposant pour simplifier

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

66

$$\begin{aligned} a' + b' + c' + \dots &= A', & n + p + q + \dots &= N. \\ a'' + b'' + \dots &= A'', & \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \dots &= E. \\ a''' + \dots &= A''', \\ &\&c. \end{aligned}$$

will become

$$\pm \frac{(1.2.3...\overline{A'-2.A'-1})^{\varepsilon'}(1.2.3...\overline{A''-1})^{\varepsilon''}(1.2.3...\overline{A'''-1})^{\varepsilon'''}\dots}{(1.2.3...\overline{a'-1.a'})^{\varepsilon'}(1.2...\overline{a''})^{\varepsilon''}(1.2...\overline{a'''} )^{\varepsilon'''}\dots(1.2...\overline{b'})^{\varepsilon'}(1.2...\overline{b''})^{\varepsilon''}\dots(1.2...\overline{c'})^{\varepsilon'}(1.2...\overline{c''})^{\varepsilon''}\dots(1.2.3...\overline{\varepsilon'})^{\varepsilon'}(1.2...\overline{\varepsilon''})^{\varepsilon''}(1.2...\overline{\varepsilon'''} )^{\varepsilon'''}\dots}$$

le signe + ayant lieu si  $(N + E)$  est pair & le signe – s'il est impair.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \{\alpha^3\beta^2\} &= \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1.2}\{3\alpha + 2\beta\} - \frac{1.2.3}{1.2.3}\{3\alpha + \beta\}\{\beta\} - \frac{1.2.3}{1.2.1.2}\{2\alpha + 2\beta\}\{\alpha\} \\ &\quad - \frac{1.2.1}{1.2.3.1.2}\{3\alpha\}\{2\beta\} - \frac{1.2.1}{1.2}\{2\alpha + \beta\}\{\alpha + \beta\} \\ &\quad - \frac{1.2.1}{1.2.1.2}\{\alpha + 2\beta\}\{2\alpha\} \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2.3.1.2}\{3\alpha\}\{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2}\{\alpha + \beta\}\{\alpha\}\{\beta\} - \frac{1}{1.2.1.2}\{2\alpha\}\{\alpha\}\{\beta\}^2 \\ &\quad + \frac{1.2}{1.2.1.2}\{\alpha + 2\beta\}\{\alpha\}^2 - \frac{1}{1.2}\{\alpha + \beta\}\{\alpha\}^2\{\beta\} \\ &\quad + \frac{1.1}{1.2.1.2}\{2\alpha\}\{2\beta\}\{\alpha\} - \frac{1}{1.2.1.2.3}\{2\beta\}\{\alpha\}^3 \\ &\quad + \frac{1.1}{1.2}\{2\alpha\}\{\alpha + \beta\}\{\beta\} \\ &\quad + \frac{1^2}{1.2}\{\alpha + \beta\}^2\{\alpha\} + \frac{1}{1.2.3.1.2}\{\alpha\}^3\{\beta\}^2, \end{aligned}$$

& si l'on supposoit  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , on auroit

$$\begin{aligned} \{2^3 1^2\} &= 2\{8\} - \{7\}\{1\} + \frac{1}{6}\{6\}\{1\}^2 \\ &\quad - \frac{3}{2}\{6\}\{2\} + \{5\}\{2\}\{1\} \\ &\quad - \frac{1}{6}\{6\}\{2\} + \frac{1}{2}\{4\}\{2\}^2 \\ &\quad - \{5\}\{3\} + \frac{1}{4}\{4\}\{2\}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\{4\}^2 + \frac{1}{2}\{4\}\{3\}\{1\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{3\}^2\{2\} \\ &\quad - \frac{1}{4}\{4\}\{2\}\{1\}^2 + \frac{1}{12}\{2\}^3\{1\}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\{3\}\{2\}^2\{1\} - \frac{1}{12}\{2\}^4 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (A^2 B^2 C^2 DE) &= 2(A^8) - (A^7)(A) + \frac{1}{6}(A^6)(A)^2 \\ &\quad - \frac{5}{3}(A^6)(A^2) + (A^5)(A^2)(A) \\ &\quad - (A^5)(A^3) + \frac{3}{4}(A^4)(A^2)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(A^4)^2 + \frac{1}{2}(A^4)(A^3)(A) \\ &\quad + \frac{1}{2}(A^3)^2(A^2) \\ &\quad - \frac{1}{4}(A^4)(A^2)(A)^2 + \frac{1}{12}(A^2)^3(A)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(A^3)(A^2)^2(A) - \frac{1}{12}(A^2)^4. \end{aligned}$$

2.° Si l'on fait avec les quantités  $(A)$ ,  $(AB)$ ,  $(ABC)$  &c. ou  $\{1\}$ ,  $\{1^2\}$ ,  $\{1^3\}$ , &c. la fonction rationnelle & entière la plus générale possible de la dimension  $\varpi$ , ou si l'on prend tous les différens termes de la forme  $\{1\}^{\varepsilon'}$ ,  $\{1^2\}^{\varepsilon''}$ ,  $\{1^3\}^{\varepsilon'''}$  ..... qui peuvent résulter des manières possibles de satisfaire à l'équation

$$\varepsilon' + 2\varepsilon'' + 3\varepsilon''' + \dots = \varpi,$$

$\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'''$  .... étant des nombres entiers positifs ou zéro, la valeur de  $\{\varpi\}$  contiendra tous ces termes; & le coefficient numérique du terme quelconque

$$\{1\}^{\varepsilon'}, \{1^2\}^{\varepsilon''}, \{1^3\}^{\varepsilon'''} \dots$$

en supposant  $\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \dots = E$ , sera

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

68

$$\pm \frac{\varpi(1.2...\overline{E-1})}{(1.2...\varepsilon')(1.2...\varepsilon'')(1.2...\varepsilon''')....}$$

le signe + ayant lieu si  $(\varpi + E)$  est pair, & le signe - s'il est impair.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \{5\} &= \frac{5.1.2.3.4}{1.2.3.4.5} \{1\}^5 - \frac{5.1.2.3}{1.2.3} \{1\}^3 \{1^2\} + \frac{5.1.2}{1.2} \{1\} \{1^2\}^2 \\ &+ \frac{5.1.2}{1.2} \{1\}^2 \{1^3\} - \frac{5.1}{1} \{1^2\} \{1^3\} - \frac{5.1}{1} \{1\} \{1^4\} + \frac{5}{1} \{1^5\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} (A^5) &= (A)^5 - 5(A)^3(AB) + 5(A)(AB)^2 + 5(A)^2(ABC) \\ &- 5(AB)(ABC) - 5(A)(ABCD) + 5(ABCDE). \end{aligned}$$

L'inspection des Tables ci-jointes, que je crois faciles à entendre la ns explication, & qu'il me paroîtroit intéresla nt de continuer, pourra suppléer aux détails de procédés qui ne sont pas ici de mon objet \*.

\* On étoit sur le point d'imprimer ce Mémoire, lorsqu'il m'est venu en idée de rechercher l'expression générale d'un nombre pris quelque part que ce soit dans ces Tables, ou, ce qui est la même chose, en supposant ce qui précède, celle du coefficient numérique du terme

$$\{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}an} \times \{1^2\}^{a_1} \{1^3\}^{a_2} \{1^4\}^{a_3} \dots \{1^{n+1}\}^{an},$$

dans la valeur du produit

$$\{\overline{n+1}\}^{an} \dots \{4\}^{a_3} \{3\}^{a_2} \{2\}^{a_1} \{1\}^{D-2a_1-3a_2-4a_3-\dots-\overline{n+1}an}.$$

l'ai trouvé que si l'on indique ce coefficient, qui est une Fonction de  $a_1, a_2, \dots a_1, a_2,$  & c. par

$$\pm F \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \dots an \\ a_1, a_2, a_3, \dots an \end{matrix} \right),$$

le signe + ayant lieu si

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

est un nombre pair, & le signe - s'il est impair, on aura pour déterminer cette Fonction, la formule suivante (én supposant pour simplifièr

69



M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

71

|                | $\{1\}$ | $\{1^2\}$ | $\{1^3\}$ | $\{1^4\}$ | $\{1^5\}$ | $\{1^6\}$ | $\{1^7\}$ |
|----------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\{7\} =$      | 1       | -7        | +14       | -7        | +7        | -21       | +7        |
| $\{61\} =$     | 1       | -3        | +5        | -1        | +9        | -7        | -4        |
| $\{52\} =$     | 1       | -3        | -2        | +6        | +3        | -7        | +2        |
| $\{51^2\} =$   |         |           | 1         | -4        | +2        | +4        | -1        |
| $\{43\} =$     | 1       | *         | -3        | -1        | +5        | +3        | -2        |
| $\{421\} =$    |         |           | 1         | -2        | -1        | -3        | +8        |
| $\{41^3\} =$   |         |           |           | 1         | -3        | +3        | -1        |
| $\{3^41\} =$   |         |           | 1         | -2        | *         | -1        | +5        |
| $\{32^2\} =$   |         |           | 1         | *         | -2        | -1        | +2        |
| $\{321^2\} =$  |         |           |           | 1         | -3        | -4        | +6        |
| $\{31^4\} =$   |         |           |           |           | 1         | -2        | -1        |
| $\{2^31\} =$   |         |           |           |           | 1         | *         | -3        |
| $\{2^21^3\} =$ |         |           |           |           |           | 1         | -5        |
| $\{21^5\} =$   |         |           |           |           |           |           | 1         |
| $\{1^7\} =$    |         |           |           |           |           |           |           |

72

TABLE III. *Mém. de l'Acad. R. de Sc. année 1771, page 374.*



M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

75

VI. Cherchons maintenant les moyens généraux de faire une fonction des racines, de laquelle il soit vrai en un certain sens qu'elle égale telle de ces racines qu'on voudra.

Je dis d'abord que la fonction

$$\frac{1}{n} \left[ a + b + c + \&c. + \sqrt[n]{(a + r'b + r''c + r'''d + \dots)^n} \right. \\ + \sqrt[n]{(a + r'^2b + r''^2c + \dots)^n} + \dots \\ \left. + \sqrt[n]{(a + r'^{n-1}b + r''^{n-1}c + \dots)^n} \right]$$

égale ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , &c. indifféremment, en supposant les puissances  $n$  développées & que  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  &c. sont les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $r^n = 1$ .

Les exemples mettront cette proposition dans tout son jour. Ajoutons seulement que lorsque  $n$  est un nombre premier  $2m + 1$ , pour obtenir les valeurs rigoureuses de  $r$  en supposant

$$r^n - 1 = r^{2m+1} - 1 = 0 = (r - 1)(r^2 + x'r + 1)(r^2 + x''r + 1)(r^2 + x'''r + 1) \dots$$

on a l'équation

$$\left. \begin{aligned} x^m - x^{m-1} + \overline{m-2}x^{m-3} - \frac{\overline{m-3}\overline{m-5}}{1.2}x^{m-5} + \&c. \\ - \overline{m-1}x^{m-2} + \frac{\overline{m-2}\overline{m-3}}{1.2}x^{m-4} - \frac{\overline{m-3}\overline{m-4}\overline{m-5}}{1.2.3}x^{m-6} \end{aligned} \right\} = 0,$$

dont les racines sont  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$  &c. & qui est toujours facile à résoudre, comme on le verra ci-après par le calcul du cas où  $m = 5$ . Si  $n$  n'est pas un nombre premier, les simplifications sont encore plus grandes, & s'offrent à nous sans peine.

$$F \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, a_n \end{matrix} \right) = \dots + \\ \frac{\overline{v+1}\overline{N+1}\overline{N+2}\overline{N+3}\dots\overline{N}}{(1.2.3\dots\alpha_1)(1.2.3\dots\alpha_2)\dots(1.2.3\dots\alpha_v)} F \left( \begin{matrix} \overline{a_1 - \alpha_1}, \overline{a_2 - \alpha_2}, \dots, \overline{a_v - \alpha_v}, \overline{a_v + 1}, \overline{a_v + 2} \dots a_n \\ a_1, a_2, \dots, \overline{a_v - 1}, \overline{a_v + 1}, \overline{a_v + 2} \dots a_n \end{matrix} \right) + \dots$$

formule d'où l'on tirera  $n$  équations en donnant à  $v$  successivement pour valeur les nombres 1, 2, 3 ....  $n$ ; le second membre de chacune de ces équations étant la somme d'autant de termes que le terme quelconque en peut fournir en prenant pour  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ , ou zéro ou des nombres entiers positifs, tels que  $N >$  ou au plus  $= 0$ .

En considérant cette formule comme une équation aux différences finies à plusieurs variables, dans laquelle la différence de chaque variable soit égale à l'unité, je parviens à

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

76

intégrer & à satisfaire aux conditions par un procédé particulier dont je me propose de rendre compte dans l'un des volumes suivans.

Les applications au second & au troisième degré se trouvent ci-dessus: passons au quatrième.

VII. Comme  $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1)$ , les racines de  $r^4 = 1$  sont  
1,  $-1 = r'$ ,  $\sqrt{-1} = r''$ ,  $-\sqrt{-1} = r'''$ , & il faut prouver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}] \end{aligned}$$

égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , en supposant les carrés - carrés développés :  
mais cela posé, l'expression indiquée renferme les quatre valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) + (a+b-c-d) + (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= a, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d - (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) + (a+b-c-d) - (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= b, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) - (a+b-c-d) - \sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= d, \\ \frac{1}{4}[a+b+c+d - \sqrt{-1}(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1}) - (a+b-c-d) + \sqrt{-1}(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})] &= c. \end{aligned}$$

Donc, &c.

$$\text{VIII. } r^5 - 1 = (r-1)(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)..$$

Or si l'on avoit les quatre équations,

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{iv} = 0,$$

$$r'r'' = 1, \quad r'''r^{iv} = 1,$$

$$r''r''' = r'.$$

d'où l'on deduit

$$r'r''' = r^{iv}, \quad r''r^{iv} = r''',$$

$$r'r^{iv} = r'',$$

$$r'^2 = r''', \quad r''^2 = r^{iv}, \quad r'''^2 = r'', \quad r^{iv2} = r', \quad \&c.$$

on trouveroit pour déterminer ou  $r$ , ou  $r'$ , ou  $r''$ , ou  $r'''$ , ou  $r^{iv}$ ,  $r$  étant l'une quelconque de ces quatre quantités, l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

77

Donc les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $r^5 = 1$  & qui sont  $r', r'', r'''$ , &  $r^{iv}$  satisfont aux quatre équations que j'avois d'abord supposées & à celles qui s'en déduisent ; donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + \sqrt[5]{(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e)^5} \\ & + \sqrt[5]{(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e)^5} \\ & + \sqrt[5]{(a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e)^5} \\ & + \sqrt[5]{(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)^5}]. \end{aligned}$$

en surpolant les cinquièmes puissances développées, renferme les cinq valeurs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + (a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ & + (a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e) + (a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e) + (a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = a, \\ & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + r'(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ & + r'''(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e) + r^{iv}(a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e) + r''(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = c, \\ & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + r''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ & + r^{iv}(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e) + r'''(a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e) + r'(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = b, \\ & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + r'''(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ & + r''(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e) + r'(a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e) + r^{iv}(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = e, \\ & \frac{1}{5}[a+b+c+d+e + r^{iv}(a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e) \\ & + r'(a+r'''b+r^{iv}c+r''d+r'e) + r''(a+r^{iv}b+r''c+r'd+r''e) + r'''(a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e)] = d. \end{aligned}$$

Les cinquièmes puissances indiquées sont faciles à exécuter au moyen du système d'équations entre le produit de deux quelconques des valeurs de  $r$ , & une troisième, tel qu'il est ci-dessus ; mais il faut observer que les mêmes lettres continuant d'indiquer les mêmes nombres, & les trois équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{iv} = 0, \quad r'r'' = 1, \quad r'''r^{iv} = 1,$$

ayant lieu, on pourroit, à cause de l'ambiguïté de ces nombres, supposer  $r''.r''' = r^{iv}$  ; d'où l'on déduiroit

$$r'r''' = r'', \quad r'r^{iv} = r''', \quad r''r^{iv} = r', \quad r'^2 = r^{iv}, \quad r''^2 = r''', \quad r'''^2 = r', \quad r^{iv2} = r'';$$

second système d'équations qui est vrai, ainsi que le premier, sans l'être en même temps, & duquel on concluroit les mêmes choses que ci-dessus, quoique dans le développement des cinquièmes puissances, il conduise à d'autres valeurs.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

78

IX. Comme  $r^6 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + r + 1)(r^2 - r + 1)$ , ses six valeurs de  $r$  dans l'équation  $r^6 = 1$  sont  $1, -1, \rho', \rho'', -\rho', -\rho''$ ;  $\rho'$  &  $\rho''$  étant les valeurs qui résolvent concurremment avec l'unité l'équation  $\rho^3 = 1$ , ce qui (*art. III*) donne  $\rho' + \rho'' = -1, \rho'\rho'' = 1, \rho'^2 = \rho'', \rho''^2 = \rho',$  &c. il faut prouver que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^6} \\ & \quad + \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho''f)^6}]. \end{aligned}$$

égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ou  $f$ , en supposant les sixièmes puissances développées : mais alors la fonction renferme les six valeurs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ +\rho' \\ -\rho' \\ +\rho'' \\ -\rho'' \end{array} \right\} (a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f) \\ & \left. \begin{array}{c} + \\ + \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho' \end{array} \right\} (a+b+\rho''c+\rho''d+\rho'e+\rho''f) + \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} (a-b+c-d+e-f) \\ & \left. \begin{array}{c} + \\ + \\ +\rho' \\ +\rho' \end{array} \right\} (a+b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f) + \left. \begin{array}{c} + \\ - \\ +\rho'' \\ -\rho'' \end{array} \right\} (a-b+\rho''c-\rho''d+\rho'e-\rho''f)] = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ e \\ f \\ c \\ d \end{array} \right. \end{aligned}$$

donc, &c.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

79

X.  $r^7 - 1 = (r - 1)(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$ ; or si l'on avoit les six équations

$$1 + r' + r'' + r''' + r^{iv} + r^v + r^{vi} = 0,$$

$$r'r'' = 1, \quad r'''r^{iv} = 1, \quad r^vr^{vi} = 1,$$

$$r''r''' = r', \quad r^{iv}r^v = r';$$

d'où l'on déduit

$$r'r''' = r^v, \quad r''r^{iv} = r^{vi}, \quad r'''r^v = r^{iv}, \quad r^{iv}r^{vi} = r''',$$

$$r'r^{iv} = r'', \quad r''r^v = r''', \quad r'''r^{vi} = r'',$$

$$r'r^v = r^{vi}, \quad r''r^{vi} = r^v,$$

$$r'r^{vi} = r^{iv},$$

$$r'^2 = r''', \quad r''^2 = r^{iv}, \quad r'''^2 = r^{vi},$$

$$r^{iv2} = r^v, \quad r^{v2} = r'', \quad r^{vi2} = r', \quad \&c.$$

on trouverait  $r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ ,  $r$  étant l'une quelconque des six quantités :

donc les valeurs imaginaires de  $\sqrt[7]{1}$ , satisfont à toutes ces équations; donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} [a + b + c + d + e + f + g + \sqrt[7]{(a + r'b + r''c + r'''d + r^{iv}e + r^vf + r^{vi}g)}^7 \\ & + \sqrt[7]{(a + r'''b + r^{iv}c + r^{vi}d + r^ve + r''f + r'g)}^7 \\ & + \sqrt[7]{(a + r^vb + r^{vi}c + r''d + r'e + r'''f + r^{iv}g)}^7 \\ & + \sqrt[7]{(a + r^{vi}b + r^vc + r'd + r''e + r^{iv}f + r'''g)}^7 \\ & + \sqrt[7]{(a + r^{iv}b + r'''c + r^vd + r^{vi}e + r'f + r''g)}^7 \\ & + \sqrt[7]{(a + r''b + r'c + r^{iv}d + r'''e + r^{vi}f + r^vg)}^7 ]. \end{aligned}$$

en supposant les septièmes puissances développées, renferme les sept valeurs

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

80

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{7} [a+b+c+d+e+f+g+r'''] \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r' \\ +r'' \\ +r''' \\ +r^{iv} \\ +r^v \\ +r^{vi} \end{array} \right\} (a+r'b+r''c+r'''d+r^{iv}e+r^vf+r^{vi}g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r''' \\ +r^{iv} \\ +r^{vi} \\ +r^v \\ +r'' \\ +r' \end{array} \right\} (a+r'''b+r^{iv}c+r^{vi}d+r^ve+r''f+r'g) \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^v \\ +r^{vi} \\ +r'' \\ +r' \\ +r''' \\ +r^{iv} \end{array} \right\} (a+r^vb+r^{vi}c+r''d+r'e+r'''f+r^{iv}g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^{vi} \\ +r^v \\ +r' \\ +r'' \\ +r^{iv} \\ +r''' \end{array} \right\} (a+r^{vi}b+r^vc+r'd+r''e+r^{iv}f+r'''g) \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r^{iv} \\ +r''' \\ +r^v \\ +r^{vi} \\ +r' \\ +r'' \end{array} \right\} (a+r^{iv}b+r'''c+r^vd+r^{vi}e+r'f+r''g) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} + \\ +r'' \\ +r' \\ +r^{iv} \\ +r''' \\ +r^{vi} \\ +r^v \end{array} \right\} (a+r''b+r'c+r^{iv}d+r'''e+r^{vi}f+r^vg) = \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \\ b \\ e \\ d \\ g \\ f \end{array} \right\} .
 \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

81

XI. Ce procédé est uniforme, & pour un nombre premier  $n$  quelconque,  $r', r'', r''', \dots$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[n]{1}$ , on aura toujours un système d'équations analogue aux précédens, en supposant les  $(n-1)$  équations

$$\begin{aligned} 1 + r' + r'' + r''' + \dots &= 0, \\ r'r'' &= 1, \quad r'''r^{iv} = 1, \quad r^vr^{vi} = 1, \quad r^{vii}r^{viii} = 1, \quad \&c. \\ r''r''' &= r', \quad r^{iv}r^v = r', \quad r^{vi}r^{vii} = r', \quad \&c. \end{aligned}$$

qui donneront toutes les autres. Ce système suffira pour élever la ns embarras lès puissances indiquées, & satisfaire par conséquent à l'objet qui nous occupe ici, puisque les valeurs rigoureuses de toutes les racines de l'unité sont faciles à obtenir successivement, comme on se verra.

XII. Il y a, lorsque  $n$  n'est pas un nombre premier, des simplifications dans la forme générale ci-dessus, qui se présentent au premier coup-d'oeil; par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} \\ + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^4} \\ + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}] \end{aligned}$$

renferme les quatre valeurs de l'article VII.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f + \sqrt[6]{(a-b+\rho'c-\rho'd+\rho''e-\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+\rho''c+\rho'd+\rho'e+\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+c-d+e-f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+\rho'c+\rho'd+\rho''e+\rho''f)^6} \\ + \sqrt[6]{(a-b+\rho''c-\rho'd+\rho'e-\rho''f)^6}]. \end{aligned}$$

renferme les six valeurs de l'article IX; &c.

Mais il existe encore pour ces cas, des formes particulières plus simples.

XIII. On peut, par exemple, faire une quantité qui ait indifféremment l'une de quatre valeurs déterminées, sans élever d'autres puissances que des carrés, & par conséquent la ns employer d'imaginaires, car

$$\frac{1}{4}[a+b+c+d + \sqrt{(a+b-c-d)^2} + \sqrt{(a+c-b-d)^2} + \sqrt{(a+d-b-c)^2}]$$

renferme les quatre valeurs

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

82

$$\frac{1}{4} \left[ \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right\} + (a+b-c-d) \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} (a+c-b-d) \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} (a+d-b-c) \left. \right] = \begin{cases} a. \\ b. \\ c. \\ d. \end{cases}$$

XIV. On peut faire une quantité qui soit indifféremment l'une six, sans élever d'autres puissances que cinq différens cubes; car  $\rho$  &  $\rho'$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[3]{1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [ & a+b+c+d+e+f + \sqrt[3]{(a+b+\rho'c+d+\rho''e+f)^3} \\ & + \sqrt[3]{(a+c+\rho'b+e+\rho''d+f)^3} \\ & + \sqrt[3]{(a+d+\rho'b+f+\rho''c+e)^3} \\ & + \sqrt[3]{(a+e+\rho'c+f+\rho''b+d)^3} \\ & + \sqrt[3]{(a+f+\rho'd+e+\rho''b+c)^3} ]. \end{aligned}$$

renferme ses six valeurs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} [ a+b+c+d+e+f \begin{matrix} + \\ + \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ + \\ +\rho'' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho' \end{matrix} \right\} (a+b+\rho'c+d+\rho''e+f) \\ & \begin{matrix} + \\ +\rho'' \\ + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho' \\ +\rho'' \end{matrix} \right\} (a+c+\rho'b+e+\rho''d+f) \\ & \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho'' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ + \end{matrix} \right\} (a+d+\rho'b+f+\rho''c+e) \\ & \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho'' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ + \end{matrix} \right\} (a+e+\rho'c+f+\rho''b+d) \\ & \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ + \\ +\rho'' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ +\rho' \\ +\rho'' \\ + \end{matrix} \right\} (a+f+\rho'd+e+\rho''b+c) \left. \right] = \begin{cases} a. \\ b. \\ c. \\ d. \\ e. \\ f. \end{cases} \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

83

XV. Veut-on savoir si, sans élever d'autres puissances que cinq différens carrés, l'on pourroit faire encore une quantité qui fût indifféremment l'une de six? voici le moyen de s'en assurer.

Il faut que chaque lettre, excepté  $a$ , se trouve dans la somme des quantités radicales, deux sois en plus & trois sois en moins, pour satisfaire au cas où tous ses radicaux auront le signe + comme ici

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}[a+b+c+d+e+f+(a+b+c-d-e-f) \\ & +(a+b+d-c-e-f)+(a+c+f-b-d-e) \\ & +(a+d+e-b-c-f)+(a+e+f-b-c-d)] = a; \end{aligned}$$

mais quand on disposera les signes + & - au-devant des radicaux, de la manière qu'il faudra pour avoir dans tous, + 1, pour coefficient d'une des lettres autre que  $a$ , il faudra que les coefficients +1 & -1, continuent de se mi-partir pour toutes les autres lettres, dont la somme doit être zéro; il faut donc que deux lettres quelconques ne soient pas trois sois de même signe dans les cinq quantités radicales: or ces conditions sont impossibles à remplir.

Au reste, ce qui est impossible si l'on veut se borner à cinq carrés, n'a rien que de facile si on en élève dix, car

$$\begin{aligned} & \frac{1}{11}[2(a+b+c+d+e+f)+\sqrt{(a+b+c-d-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+d-c-e-f)^2}+\sqrt{(a+b+e-c-d-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+f-c-d-e)^2}+\sqrt{(a+c+d-b-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+c+e-b-d-f)^2}+\sqrt{(a+c+f-b-d-e)^2} \\ & +\sqrt{(a+d+e-b-c-f)^2}+\sqrt{(a+d+f-b-c-e)^2} \\ & +\sqrt{(a+e+f-b-c-d)^2}] \end{aligned}$$

renferme les six valeurs  $a, b, c, d, e, f$ .

XVI. On peut faire une quantité qui ait indifféremment l'une de huit valeurs déterminées, sans élever d'autres puissances que sept différent carrés, car

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}[a+b+c+d+e+f+g+h)+\sqrt{(a+b+c+d-e-f-g-h)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+e+f-c-d-g-f)^2}+\sqrt{(a+b+g+h-c-d-e-f)^2} \\ & +\sqrt{(a+b+c+h-b-d-f-g)^2}+\sqrt{(a+c+f+g-b-d-e-h)^2} \\ & +\sqrt{(a+d+e+g-b-c-f-h)^2}+\sqrt{(b+c+e+g)^2}], \end{aligned}$$

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

84

renferme les huit valeurs  $a, b, c, d, e, f, g, h$ .

XVII. On peut faire une quantité qui soit indifféremment l'une de neus, sans élever d'autres puissances que huit différens cubes, car  $\rho'$  &  $\rho''$  étant les valeurs imaginaires de  $\sqrt[3]{1}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9}[a+b+c+d+e+f+g+h+k \\ & +\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'\overline{d+e+f}+\rho''\overline{g+h+k})^3}+\sqrt[3]{(a+b+c+\rho'\overline{g+h+k}+\rho''\overline{d+e+f})^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'\overline{b+f+k}+\rho''\overline{c+e+h})^3}+\sqrt[3]{(a+d+g+\rho'\overline{c+e+h}+\rho''\overline{b+f+k})^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'\overline{b+e+g}+\rho''\overline{c+d+k})^3}+\sqrt[3]{(a+f+h+\rho'\overline{c+d+k}+\rho''\overline{b+e+g})^3} \\ & +\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'\overline{c+f+g}+\rho''\overline{b+d+h})^3}+\sqrt[3]{(a+e+k+\rho'\overline{b+d+h}+\rho''\overline{c+f+g})^3}] \end{aligned}$$

renferme les neus valeurs  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ .

XVIII. En général, on trouvera toujours les formes de cette espèce, en prenant dans la première, simplifiée comme dans l'article XII, les radicaux de même dénomination, en y échangeant les lettres entre elles de toutes les manières, puis faisant une somme de tous ces résultats; car chaque forme élémentaire se compose toujours de cette somme, & souvent, de différentes portions de cette somme.

Les modifications qui paroissent multiplier le nombre de formes des racines, ne sont que des complications des formes élémentaires; comme lorsque l'on prend deux ou plusieurs termes de la racine; & qu'on élève leur somme à une certaine puissance, pour la mettre ensuite sous le radical de même exposant que cette puissance; lorsqu'on fait le produit de deux termes, pour le diviser ensuite par l'un d'eux, &c. &c. & je dis que pour le quatrième degré, par exemple, il n'y a de formes essentiellement différentes, que les deux des articles VII ou XII & XII; que pour le sixième, il n'y a que les trois des articles IX ou XII, XIV & XV, &c. car la différence essentielle est dans le degré des radicaux nécessaires.

La ns entrer dans de plus longues discussions à ce sujet, parce que l'objet des formes particulières est moins de faciliter les solutions générales, que d'en simplifier les résultats, nous nous contenterons de remarquer qu'au moyen de tout ce qui précède, notre question principale se trouve réduite au second des trois chefs que nous y avons distingués (article IV); c'est-à-dire à transformer en fonction de types (article V) la quantité de laquelle on peut dire qu'elle égale telle des racines que l'on voudra.

Reprenons un instant le troisième degré.

XIX. On a vu (articles III & V) que la quantité qui est indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , se présente immédiatement sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}[(A)+\sqrt[3]{(A^3)-\frac{1}{2}(A^2B)+6(ABC)+\frac{1}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}} \\ & +\sqrt[3]{(A^3)-\frac{1}{2}(A^2B)+6(ABC)-\frac{1}{2}(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}}], \end{aligned}$$

& que pour avoir le tout en fonction de *types*, il ne s'agit que de prendre, au lieu de

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

la racine de son carré

$$(A^4B^2) - 2(A^4BC) - 2(A^3B^3) + 2(A^3B^2C) - 6(A^2B^2C^2).$$

Les Tables de l'article V donnent le surplus, & l'équation proposée étant

$$Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

si l'on fait

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' \\ \Delta'' \end{array} \right\} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left[ -2N^3 + 3^2MNP - 3^3M^2Q \right. \\ \left. + \right. \\ \left. - \right] 3M\sqrt{-3}(N^2P^2 - 2^2MP^3 - 2^2N^3Q + 2.3^2MNPQ - 3^3M^3Q^3),$$

la formule de résolution sera

$$x = \frac{1}{3M} \left[ \begin{array}{l} -N + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right] \Delta' + \begin{array}{l} + \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \end{array} \left[ \Delta'' \right]$$

formule connue & la plus simple possible, comme le prouvent les observations suivantes.

XX. On doit toujours pouvoir distinguer les différentes racines l'une de l'autre, dans la valeur générale qui les renferme toutes, uniquement en y multipliant chaque radical par les différentes racines de l'unité, de même expolant que ce radical; d'où il suit que la formule générale du troisième degré ne peut pas ne renfermer que des radicaux seconds : l'addition des radicaux dans la somme des valeurs qui résolvent concurremment doit donner zéro ; ainsi il y faut des radicaux troisièmes.

Il faut que dans chaque radical, tout soit zéro quand  $a = b = c$  puisqu'alors on doit trouver  $x = \frac{1}{3}(A) = -\frac{N}{3M}$  sans aucune ambiguïté.

Il faut que  $a^3$ ,  $b^3$  &  $c^3$  y aient le même coefficient, puisque  $a^3$  par exemple, est de la même difficulté que  $a$  à obtenir en *types* ... &c.

Comme toutes ces conditions exigent que l'on ait sous les radicaux, les nombres imaginaires dont le cube est 1, on voit qu'il est impossible d'éviter dans la solution du troisième degré, ce qu'on appelle le cas *irréductible*.

Il sera facile d'étendre & de généraliser ces remarques.

XXI. Nous avons prouvé (article XIII) que

$$\frac{1}{4}[(A) + \sqrt{(a+b-c-d)^2} + \sqrt{(a+c-b-d)^2} + \sqrt{(a+d-b-c)^2}]$$

renferme les quatre valeurs  $a, b, c, d$ , si l'on y suppose les carrés développés. Ces carrés sont, savoir,

$$\left. \begin{array}{l} (a+b-c-d)^2 \\ (a+c-b-d)^2 \\ (a+d-b-c)^2 \end{array} \right\} = (A^2) - 2(AB) + 4 \left\{ \begin{array}{l} ab+cd \\ ac+bd \\ ad+bc \end{array} \right.$$

$$= (A^2) - \frac{2}{3}(AB) + \frac{4}{5} \left\{ \begin{array}{l} 2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc), \\ 2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd), \\ 2(ad+bc) - (ab+cd) - (ac+bd), \end{array} \right.$$

En échangeant les lettres entre elles, de toutes les manières possibles; dans

$$2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc)$$

on ne trouve que les trois valeurs

$$\begin{aligned} 2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc) &= u' \\ 2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd) &= u'' \\ 2(ad+bc) - (ab+cd) - (ac+bd) &= u'''; \end{aligned}$$

mais par l'article III

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{(ab+cd+r'\overline{ac+bd}+r''\overline{ad+bc})^3} \\ &+ \sqrt[3]{(ab+cd+r''\overline{ac+bd}+r'\overline{ad+bc})^3}, \end{aligned}$$

en y supposant les cubes développés, sera indifféremment ou  $u'$ , ou  $u''$ , ou  $u'''$ . Le premier de ces cubes est

$$\begin{aligned} &(A^3B^3) - \frac{1}{2}(A^3B^2C) + 6(A^3BCD) + 6(A^2B^2C^2) - 3(A^2B^2CD) \\ &+ \frac{1}{2}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\sqrt{-3}; \end{aligned}$$

l'autre n'en diffère que parce que  $\sqrt{-3}$  y est en moins : or comme le carré du produit des différences entre les racines est une fonction de  $types$ , la solution ne dépend plus que des propositions de l'article V.

L'équation proposée étant

$$Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

$$\& \begin{matrix} \Delta' \\ \Delta'' \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \Delta' \\ \Delta'' \end{matrix}} \right\} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} (2P^3 - 3^2 NPQ + 3^3 MQ^2 + 3^3 N^2 R - 2^3 3^2 MPR)$$

$$+ \left. \vphantom{\begin{matrix} \Delta' \\ \Delta'' \end{matrix}} \right\} 3\sqrt{-3} \begin{bmatrix} N^2 P^2 Q^2 & -2^2 N^2 P^3 R & -3^3 N^4 R^2 \\ -2^2 MP^3 Q^2 & +2^4 MP^4 R & +2^4 3^2 MN^2 PR^2 \\ -2^2 N^3 Q^2 & +2.3^2 N^3 PQR & -2^7 M^2 P^2 R^2 \\ +2.3MNPQ^3 & -2^4.5MNP^2 QR & -2^6.3M^2 NQR^2 \\ -3^3 M^2 Q^4 & -2.3MN^2 Q^2 R & +2^8 M^3 R^3 \\ & +2^4.3^2 M^2 PQ^2 R & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} u' \\ u'' \\ u''' \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} u' \\ u'' \\ u''' \end{matrix}} \right\} = \begin{matrix} + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \Delta' \\ \Delta'' \end{matrix}$$

ou bien  $u'$ ,  $u''$  &  $u'''$  étant les trois racines de l'équation

$$u^3 + 3(-P^2 + 3NQ - 2^2.3MR)u + (-2P^3 + 3^2 NPQ - 3^3 MQ^2 - 3^3 N^2 R + 2^3.3^2 MPR) = 0,$$

on a

$$u = \frac{1}{2^2 M} \left[ -N + \sqrt[3]{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu') \right]$$

$$+ \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu'') \right] + \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{3}} (3N^2 - 2^3 MP + 2^2 Mu''') \right],$$

& si au lieu des deux derniers radicaux, on prend la racine du carré de leur somme, le tout ne dépendra que de  $u'$ .

XXII. Si nous prenons la forme de l'article XII, savoir,

$$\frac{1}{4} [(A) + \sqrt[4]{(a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4} + \sqrt[4]{(a+b-c-d)^2} + \sqrt[4]{(a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4}]$$

nous aurons  $(a + b - c - d)^2$  par l'article précédent; & quant aux deux quatrièmes puissances, si l'on fait

$\Phi = 3^2(A^4) - 2^23(A^3B) - 2.37(A^2B^2) + 2^2.23(A^2BC) - 2^23.23(ABCD) - 2^2[3(A^2) - 2AB]u' + 2^27u'^2$ ,  
 $u'$  ayant la même valeur que dans l'article précédent, on aura

$$\left. \begin{array}{l} (a-b+c\sqrt{-1}-d\sqrt{-1})^4 \\ (a-b-c\sqrt{-1}+d\sqrt{-1})^4 \end{array} \right\} = \frac{1}{3^2} \Phi \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \left. \begin{array}{l} 2^2(a-b)(c-d)[(a-b)^2 - (c-d)^2]\sqrt{-1}; \end{array} \right.$$

or faisant

$$\Psi = 2^2(A^2B^2) - 2^2(A^2BC) + 2^23(ABCD) - u'^2,$$

on a

$$\begin{aligned} [(a-b)(c-d)]^2 &= \frac{1}{3} \Psi \\ [(a-b)^2 - (c-d)^2]^2 &= \frac{1}{3^2} (\Phi + 2^23\Psi); \end{aligned}$$

d'où, au moyen des propositions de l'article V, résulte la formule suivante,  $\Phi$  &  $\Psi$  étant, savoir,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

89

$$\begin{aligned}\Phi &= 3^2 N^4 - 2^4 3 M N^2 P - 2^5 M^2 P^2 + 2^5 3^2 M^2 N Q - 27 \cdot 3^2 M^3 R \\ &\quad - 2^2 M (3 N^2 - 2^3 M P) u' + 2^3 7 M^2 u'^2. \\ \Psi &= 2^2 P^2 - 2^2 3 N Q + 2^4 3 M R - u'^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2^2 M} \left[ -N \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} (3 N^2 - 2^3 M P + 2^2 M u') \right. \\ &\quad \left. \begin{matrix} + \\ - \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{\frac{1}{3^2}} (\Phi + 2^2 M \sqrt{-3} \Psi (\Phi + 2^2 3 M^2 \Psi)) \right. \\ &\quad \left. \begin{matrix} + \\ - \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{\frac{1}{3^4}} (\Phi - 2^2 M \sqrt{-3} \Psi (\Phi + 2^2 3 M^2 \Psi)) \right\}.\end{aligned}$$

XXIII. Pour l'équation

$$r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

par exemple, qui renferme les valeurs imaginaires de  $\sqrt[5]{1}$  ; on aura, par la première formule,

$$r = \frac{1}{4} \left[ -1 \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{5} \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} \begin{matrix} + \\ - \\ - \\ + \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt{-5 - 2\sqrt{5}} \right.$$

& par la seconde,

$$r = \frac{1}{4} \left[ -1 \begin{matrix} + \\ + \\ - \\ - \end{matrix} \right] \left\{ \sqrt{5} \begin{matrix} + \\ - \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{5} (-3 + 4\sqrt{-1}) \begin{matrix} + \\ - \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \sqrt[4]{5} (-3 - 4\sqrt{-1}) \right\}.$$

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

90

XXIV. Avant de passer au cinquième degré, il faut expliquer une nouvelle notation abrégée qui rendra nos expressions plus concises, & nous fournira des procédés de calcul plus expéditifs que ceux de l'algèbre. Cette notation convient à certaines quantités d'une forme systématique dans lesquelles se résolvent celles que j'appelle types, & auxquelles se réduit toujours immédiatement la fonction qui est indifféremment telle des racines que l'on voudra.

J'appellerai *Types partiels*, les expressions abrégées de ces quantités. Ce sont des suites de termes faisant partie du développement d'un même *type*, dont la propriété fondamentale est que si, dans un certain échange entre les lettres, il résulte d'un terme, un autre terme qui soit de la suite, il ne résulte des autres, aucun terme qui n'y soit pas compris; de manière que cet échange n'y produise aucun changement: & qu'au contraire, s'il en résulte un terme qui n'y soit pas compris, aucun des résultans ne le soit.

Je suppose, par exemple,

$$[\alpha \beta \gamma] = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\gamma b^\alpha c^\beta + a^\beta b^\gamma c^\alpha,$$

c'est-à-dire que  $[\alpha \beta \gamma]$  représente la somme de tous les termes différens que l'on peut former en conservant toujours  $a, b$  &  $c$ , dans l'ordre alphabétique, prenant au premier terme pour exposans respectifs de ces lettres, les nombres  $\alpha, \beta$  &  $\gamma$  dans l'ordre même où ils sont écrits, & concluant ensuite chaque terme, du précédent, en y empruntant les exposans successifs dans l'ordre qui suit, le *dernier*, le *premier*, le *second*; ordre de succession suffisamment indiqué par celui des caractéristiques I, II, III, dans l'expression  $[\alpha \beta \gamma]$ , & d'où l'on ne déduit ici que trois termes, puisqu'en continuant toujours, on retomberoit dès le quatrième, sur le premier.

Il suit de-là que

$$[\alpha \gamma \beta] = a^\alpha b^\gamma c^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma + a^\gamma b^\beta c^\alpha,$$

& que par conséquent, en ne supposant dans le développement du type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$  que  $a, b$  &  $c$ , on a

$$(A^\alpha B^\beta C^\gamma) = [\alpha \beta \gamma] + [\alpha \gamma \beta].$$

Il est facile de conclure semblablement

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

91

$$\begin{aligned}
 [\alpha \beta \gamma \delta]_{\text{III IV II I}} &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha, \\
 [\alpha \delta \beta \gamma]_{\text{IV I II III}} &= a^\alpha b^\delta c^\beta d^\gamma + a^\delta b^\beta c^\gamma d^\alpha + a^\beta b^\gamma c^\alpha d^\delta + a^\gamma b^\alpha c^\delta d^\beta, \\
 [\alpha \gamma \delta \beta]_{\text{II IV I III}} &= a^\alpha b^\gamma c^\delta d^\beta + a^\delta b^\alpha c^\beta d^\gamma + a^\beta b^\delta c^\gamma d^\alpha + a^\gamma b^\beta c^\alpha d^\delta, \\
 [\alpha \beta \delta \gamma]_{\text{III IV II I}} &= a^\alpha b^\beta c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\beta d^\alpha, \\
 [\alpha \gamma \beta \delta]_{\text{IV I II III}} &= a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\delta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\alpha + a^\beta b^\delta c^\alpha d^\gamma + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\beta, \\
 [\alpha \delta \gamma \beta]_{\text{II IV I III}} &= a^\alpha b^\delta c^\gamma d^\beta + a^\gamma b^\alpha c^\beta d^\delta + a^\beta b^\gamma c^\delta d^\alpha + a^\delta b^\beta c^\alpha d^\gamma,
 \end{aligned}$$

d'où il suit qu'en ne supposant dans le développement du type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$  que  $a, b, c$  &  $d$ , on a

$$\begin{aligned}
 (A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta) &= [\alpha \beta \gamma \delta]_{\text{III IV II I}} + [\alpha \delta \beta \gamma]_{\text{IV I II III}} + [\alpha \gamma \delta \beta]_{\text{II IV I III}} \\
 &\quad + [\alpha \beta \delta \gamma]_{\text{III IV II I}} + [\alpha \gamma \beta \delta]_{\text{IV I II III}} + [\alpha \delta \gamma \beta]_{\text{II IV I III}}.
 \end{aligned}$$

Il faut observer, avant d'aller plus loin, que dans ses loix que j'ai prises ici, j'avois une intention particulière. Les deux portions  $[\alpha \beta \gamma]_{\text{II III I}}$  &  $[\alpha \gamma \beta]_{\text{II III I}}$  du type sont telles qu'elles ne sont que se convertir réciproquement l'une en l'autre par les échanges qu'on peut faire dans la valeur de chacune, entre les lettres  $a, b$  &  $c$ ; j'ai de même assujetti à cette propriété les six portions dans lesquelles j'ai partagé  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$ :

ainsi il faut, pour obtenir en types la quantité  $[\alpha \beta \gamma]_{\text{II III I}}$ , faire une fonction qui ait indifféremment l'une de ces deux valeurs  $[\alpha \beta \gamma]_{\text{II III I}}$  &  $[\alpha \gamma \beta]_{\text{II III I}}$ , & de même, pour obtenir en types la quantité  $[\alpha \beta \gamma \delta]_{\text{III IV II I}}$ , il faut faire une fonction qui ait indifféremment l'une des six valeurs

$$\begin{aligned}
 &[\alpha \beta \gamma \delta]_{\text{III IV II I}}, [\alpha \delta \beta \gamma]_{\text{IV I II III}}, [\alpha \gamma \delta \beta]_{\text{II IV I III}}, \\
 &[\alpha \beta \delta \gamma]_{\text{III IV II I}}, [\alpha \gamma \beta \delta]_{\text{IV I II III}}, [\alpha \delta \gamma \beta]_{\text{II IV I III}},
 \end{aligned}$$

Ce n'est que pour satisfaire à cette vue particulière, qu'il a fallu partager le type  $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$  en portions où les caractéristiques I, II, III, & IV se trouvassent dans un ordre différent.

En suivant ce procédé, on aura

$$\begin{aligned}
[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]_{\text{V III IV I II}} &= a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon + a^\delta b^\varepsilon c^\beta d^\gamma e^\alpha + a^\gamma b^\alpha c^\varepsilon d^\beta e^\delta \\
&\quad + a^\beta b^\delta c^\alpha d^\varepsilon e^\gamma + a^\varepsilon b^\gamma c^\delta d^\alpha e^\beta \\
[\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma]_{\text{V III IV I II}} &= a^\alpha b^\varepsilon c^\delta d^\beta e^\gamma + a^\beta b^\gamma c^\varepsilon d^\delta e^\alpha + a^\delta b^\alpha c^\gamma d^\varepsilon e^\beta \\
&\quad + a^\varepsilon b^\beta c^\alpha d^\gamma e^\delta + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha e^\varepsilon \\
[\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta]_{\text{V III IV I II}} &= a^\alpha b^\gamma c^\beta d^\varepsilon e^\delta + a^\varepsilon b^\delta c^\gamma d^\beta e^\alpha + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma e^\varepsilon \\
&\quad + a^\gamma b^\varepsilon c^\alpha d^\delta e^\beta + a^\delta b^\beta c^\varepsilon d^\alpha e^\gamma \\
[\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta]_{\text{V III IV I II}} &= a^\alpha b^\delta c^\varepsilon d^\gamma e^\beta + a^\gamma b^\beta c^\delta d^\varepsilon e^\alpha + a^\varepsilon b^\alpha c^\beta d^\delta e^\gamma \\
&\quad + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta e^\varepsilon + a^\beta b^\varepsilon c^\gamma d^\alpha e^\delta
\end{aligned}$$

La somme de ces quatre *types partiels* est encore un *type partiel*, qui, à cause de l'enchaînement entre les exposans  $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  peut être noté ainsi  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , en

|  |   |     |    |     |    |
|--|---|-----|----|-----|----|
|  | I | IV  | V  | III | II |
|  | V | III | IV | I   | II |

concevant que le premier ordre de caractéristiques détermine, non une suite de simples termes, mais une suite de *types partiels* de la forme  $\underset{\text{v}}{\text{a}} \underset{\text{iii}}{\text{b}} \underset{\text{iv}}{\text{c}} \underset{\text{i}}{\text{d}} \underset{\text{ii}}{\text{e}}$  indiquée par le second ordre de caractéristiques. Cependant à cause des difficultés de l'impression, je substituerai ici, à cette notation qui m'est familière, la suivante qui peut suffire pour ce Mémoire: je serai

$$[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] = [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma] + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta] + [\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta]$$

& semblablement

$$\begin{aligned} [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] &= [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] + [\alpha \varepsilon \gamma \delta \beta] + [\alpha \gamma \delta \beta \varepsilon] + [\alpha \delta \beta \varepsilon \gamma] \\ &= [\alpha \beta \delta \varepsilon \gamma] + [\alpha \varepsilon \beta \gamma \delta] + [\alpha \gamma \varepsilon \delta \beta] + [\alpha \delta \gamma \beta \varepsilon] \end{aligned}$$

Si l'on suppose de plus

$$\begin{aligned}
[\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{II}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\beta}] &= [\alpha \underset{\text{V}}{\beta} \underset{\text{IV}}{\gamma} \underset{\text{II}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\delta} \underset{\text{III}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\delta} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{II}}{\beta} \underset{\text{I}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\beta} \underset{\text{II}}{\delta} \underset{\text{I}}{\varepsilon} \underset{\text{III}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\varepsilon} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{II}}{\gamma} \underset{\text{I}}{\beta} \underset{\text{III}}{\beta}] \\
[\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{IV}}{\gamma} \underset{\text{I}}{\delta} \underset{\text{II}}{\varepsilon} \underset{\text{III}}{\beta}] &= [\alpha \underset{\text{V}}{\beta} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{I}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\varepsilon} \underset{\text{II}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\delta} \underset{\text{IV}}{\gamma} \underset{\text{I}}{\varepsilon} \underset{\text{III}}{\beta} \underset{\text{II}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\beta} \underset{\text{III}}{\delta} \underset{\text{II}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\varepsilon} \underset{\text{IV}}{\beta} \underset{\text{I}}{\delta} \underset{\text{III}}{\gamma} \underset{\text{II}}{\beta}] \\
[\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{IV}}{\gamma} \underset{\text{I}}{\varepsilon} \underset{\text{II}}{\delta} \underset{\text{III}}{\beta}] &= [\alpha \underset{\text{V}}{\beta} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\delta} \underset{\text{II}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\delta} \underset{\text{IV}}{\beta} \underset{\text{I}}{\gamma} \underset{\text{III}}{\varepsilon} \underset{\text{II}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{I}}{\varepsilon} \underset{\text{III}}{\beta} \underset{\text{II}}{\beta}] + [\alpha \underset{\text{V}}{\varepsilon} \underset{\text{IV}}{\gamma} \underset{\text{I}}{\beta} \underset{\text{III}}{\delta} \underset{\text{II}}{\beta}]
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \left( A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\varepsilon \right) = & [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{III}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{II}}{\varepsilon}] + [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\delta} \underset{\text{II}}{\gamma}] + [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{II}}{\delta} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\gamma}] \\ & + [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{II}}{\gamma} \underset{\text{IV}}{\varepsilon} \underset{\text{I}}{\delta}] + [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{I}}{\gamma} \underset{\text{II}}{\varepsilon}] + [\alpha \underset{*}{\beta} \underset{\text{II}}{\varepsilon} \underset{\text{IV}}{\delta} \underset{\text{I}}{\gamma}] \end{aligned}$$

& les six *types partiels* qui composent cette somme, seront tels qu'ils ne seront que se convertir réciproquement l'un en l'autre, si l'on échange dans la valeur de chacun, les lettres  $a, b, c, d, e$ , entre elles: de manière que pour obtenir en types l'un de ces *types partiels*, il faudra faire une fonction qui soit indifféremment l'un des six.

Ces exemples suffisent pour entendre l'algorithme en question.

XXV. Lorsque  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  sont des nombres déterminés, s'il y en a d'égaux entre eux, il pourra arriver que substituant dans ces formules d'abréviation & dans leurs valeurs, on trouve dans la valeur des termes qui ne diffèrent point: par exemple, on trouve, en substituant dans l'une des formules précédentes,

$$(i.e. [\alpha \beta \gamma \delta] = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta + a^\delta b^\gamma c^\alpha d^\beta + a^\beta b^\alpha c^\delta d^\gamma + a^\gamma b^\delta c^\beta d^\alpha, )$$

$$[2 \ 2 \ 1 \ 1] = a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^1 d^1 + a^1 b^1 c^2 d^2;$$

cependant en suivant immédiatement la loi indiquée par l'ordre des caractéristiques I, II, III, IV, on auroit dû s'arrêter, après les deux premiers termes.

Pour éviter toute équivoque à cet égard, je supposerai que dans le développement des *types partiels*, comme dans celui des types mêmes, il ne se trouve jamais que des termes divers entre eux, & jamais d'autre coefficient que l'unité.

Ainsi, par exemple,  $[2 \ 2 \ 1 \ 1]$  ne représentera que les deux termes  $a^2 b^2 c d + a b c^2 d^2$  & le résultat de la substitution dans la formule  $[\alpha \beta \gamma \delta]$  quand  $\alpha = \beta = 2, \gamma = \delta = 1$ , sera  $+2[2 \ 2 \ 1 \ 1]; \&c.$

Le cas où quelques-uns des exposans  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  sont zéro, ne produit rien de particulier; ainsi

$$[2 \ 1 \ 0 \ 0] = a^2 b^1 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^2 d^1 + a^1 b^2 c^0 d^0 + a^0 b^0 c^1 d^2 = a^2 b + c^2 d + a b^2 + c d^2,$$

$$[2 \ 0 \ 0 \ 2] = a^2 d^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2.$$

XXVI. On peut, par le moyen des opérations suivantes; trouver le produit de deux *types partiels* dans lesquels l'ordre entre les caractéristiques est, ou doit être conforme.

Soit demandé, par exemple, le produit de  $[2 \ 1 \ 0 \ 0]$  par  $[7 \ 0 \ 4 \ 0]$ ; j'écris quatre fois 7040, & au-dessus, les quatre permutations de 2100 indiquées par l'ordre, des caractéristiques, comme il suit.

2100 0021 1200 0012  
7040 7040 7040 7040

J'ajoute les nombres qui se trouvent immédiatement l'un sur l'autre, & j'ai , pour le produit,

$$\begin{array}{cccc} [2 & 1 & 0 & 0] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} \begin{array}{cccc} [7 & 0 & 4 & 0] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} = \begin{array}{cccc} [9 & 1 & 4 & 0] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} + \begin{array}{cccc} [7 & 0 & 6 & 1] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} + \begin{array}{cccc} [8 & 2 & 4 & 0] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array} + \begin{array}{cccc} [7 & 0 & 5 & 2] \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array}.$$

Cet exemple suffiroit pour appliquer le même procédé à tous les cas, si les réductions , lorsqu'il y en a, n'exigeaient une ou deux considérations particulières.

Soit proposé le produit de  $\begin{array}{cccc} [1 & 0 & 0 & 2 & 2] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$  par  $\begin{array}{cccc} [3 & 1 & 1 & 0 & 0] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$  ; je fais

$$31100 \quad 00113 \quad 13010 \quad 01031$$

$$10022 \quad 10022 \quad 10022 \quad 10022$$

d'où

$$\begin{array}{cccc} [1 & 0 & 0 & 2 & 2] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \begin{array}{cccc} [3 & 1 & 1 & 0 & 0] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} = \begin{array}{cccc} [4 & 1 & 1 & 2 & 2] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} + \begin{array}{cccc} [1 & 0 & 1 & 3 & 5] \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ [2 & 3 & 0 & 3 & 1] + [2 & 0 & 3 & 2 & 3] + [1 & 1 & 0 & 5 & 3]; \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \quad \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \quad \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$$

mais, dans ce produit, les deux *types partiels*  $\begin{array}{cccc} [1 & 0 & 1 & 3 & 5] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  &  $\begin{array}{cccc} [1 & 1 & 1 & 5 & 3] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  représentent chacun cinq termes différens , au lieu que les deux  $\begin{array}{cccc} [2 & 3 & 0 & 3 & 2] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  &  $\begin{array}{cccc} [2 & 0 & 3 & 2 & 3] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$ , représentent les cinq mêmes termes.

Pour faire ces sortes de réductions, en calculant, je suppose, des *types partiels* de la forme  $\begin{array}{ccccc} [\alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  j'ai sous les yeux, ou dans la mémoire, l'ordre de permutation que voici

$$12345, 45231, 31524, 24153, 53412,$$

lequel est indiqué par  $\begin{array}{ccccc} [1 & 2 & 3 & 4 & 5] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$ .

Cet enchaînement me fait voir que  $\begin{array}{ccccc} [2 & 3 & 0 & 3 & 2] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  est la même chose que  $\begin{array}{ccccc} [0 & 2 & 2 & 3 & 3] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$ , & que  $\begin{array}{ccccc} [2 & 0 & 3 & 2 & 3] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$  n'est encore que la même chose; car, pour trouver un équivalent de  $\begin{array}{ccccc} [2 & 3 & 0 & 3 & 2] \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{array}$ , dans lequel 0 qui occupe ici la troisième place, occupe la première, je choisis 31524, & je m'en sers pour appeler les nombres dans cet ordre :

0 qui est le 3<sup>me</sup>.

2 qui est le 1<sup>er</sup>.

2 qui est le 5<sup>me</sup>.

3 qui est le 2<sup>me</sup>.

3 qui est le 4<sup>me</sup>.

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

95

Pareillement, pour trouver un équivalent de  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$ , dans lequel 0 qui occupe ici la deuxième place, occupe la première. je choisis 24153, dont je me sers pour appeler les nombres dans cet ordre :

0 qui est le 2<sup>me</sup>.

2 qui est le 4<sup>me</sup>.

2 qui est le 1<sup>er</sup>.

3 qui est le 5<sup>me</sup>.

3 qui est le 3<sup>me</sup>.

& ainsi des autres.

On a donc, après avoir ordonné & réduit,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix} \\ + 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{bmatrix}.$$

Soit encore proposé le produit de  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$  par  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$  ;

je fais

$$\begin{array}{ccccc} 21101 & 01112 & 12110 & 10211 & 11021 \\ 21110 & 21110 & 21110 & 21110 & 21110, \end{array}$$

& je dois conclure

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix};$$

parce qu'en conséquence de l'article XXV,  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$  ne représente qu'un seul terme.

On calculera d'une manière analogue le produit  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \end{bmatrix}$  ; &c. & ainse de tous les autres *types partiels* de même forme entr'eux : les détails ci-dessus doivent suffire pour tous les cas.

Je n'écrirai communément, dans la suite, les caractéristiques I, II, III, etc. que sous un seul des termes, quand leur ordre sera conforme dans tous.

XXVII. On a vu (*article III*) que dans la forme où se présente immédiatement la fonction qui est indifféremment ou *a*, ou *b*, ou *c*, il reste une quantité dans laquelle il n'est pas indifférent d'échanger les lettres entre elles; cette quantité est

$$a^2b + b^2c + ac^2 - a^2c - ab^2 - bc^2$$

ou  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{bmatrix}$ , qui dépend du second degré.

On a vu de même (*article XXI*) que dans la forme où se présente immédiatement là fonction qui est indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , il reste la quantité

$$2(ab + cd) - (ac + bd + ad + bc) = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix},$$

qui dépend du troisième degré; & non du sixième, quoique de la forme  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$ , parce

que, dans ses valeurs particulières de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  qui ont lieu,  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$  &  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta & \gamma \\ \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$  né différent point.

Passons au cinquième degré.

XXVIII. Si l'on fait

$$(a + r'b + r''c + r'''d + r^{iv}e)^5 = \Delta'^5$$

$$(a + r''b + r'c + r^{iv}d + r'''e)^5 = \Delta''^5$$

$$(a + r'''b + r^{iv}c + r''d + r'e)^5 = \Delta'''^5$$

$$(a + r^{iv}b + r'''c + r'd + r''e)^5 = \Delta^{iv5}$$

on aura (*article VIII*), pour la fonction qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ceci

$$\frac{1}{5}[(A) + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}].$$

Élevant les cinquièmes puissances indiquées, en faisant usage du premier système d'équations entre les  $r$  (*article VIII*) on a, si l'on suppose

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} = u',$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$$

$$+ 2.3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2.3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} = \phi',$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$$

$$+ 2.3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2.3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} = \phi'',$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$$

$$+ 2.3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2.3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} = \phi''',$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix}$$

$$+ 2.3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} + 2^2.3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{V} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} = \phi^{iv},$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

97

$$\begin{aligned}\Delta^5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r'\varphi' + 5r''\varphi'' + 5r'''\varphi''' + 5r^{iv}\varphi^{iv} \\ \Delta''^5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r''\varphi' + 5r'\varphi'' + 5r^{iv}\varphi''' + 5r'''\varphi^{iv} \\ \Delta'''^5 &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r'''\varphi' + 5r^{iv}\varphi'' + 5r''\varphi''' + 5r'\varphi^{iv} \\ \Delta^{iv5} &= (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2.5u' + 5r^{iv}\varphi' + 5r'''\varphi'' + 5r'\varphi''' + 5r''\varphi^{iv}\end{aligned}$$

ou, en employant les plus simples valeurs de  $r$ , de l'article XXIII,  
& faisant pour simplifier

$$\begin{aligned}(A^5) - \frac{5}{2^2}(A^4B) - \frac{5}{2}(A^3B^2) - 5(A^3BC) \\ - \frac{3 \cdot 5}{2}(A^2B^2C) - 3 \cdot 5(A^2BCD) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) = M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} \Delta^5 \\ \Delta''^5 \\ \Delta'''^5 \\ \Delta^{iv5} \end{array} \right\} &= M + \frac{5^2}{2} u' \left. \begin{array}{l} + \\ + \\ - \\ - \end{array} \right\} \frac{5}{2^2} (\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv}) \sqrt{5} \\ &+ \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \frac{5}{2^2} (\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv}) \sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} \left. \begin{array}{l} + \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \frac{5}{2^2} (\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv}) \sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Or  $u'$  est de la forme  $[\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \varepsilon]$  qui dépend (article XXIV) d'une équation particulière

du sixième degré, & l'on va voir que le carré de  $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})$ , ainsi que la quantité qui est indifféremment, ou  $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2$ , ou  $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2$ , ne renferment que des *types partiels* de cette même forme.

On pourroit le démontrer *à priori*: car

$$\begin{aligned}(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2 &= \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} \\ &- 2(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv} + \varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi''') + 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv});\end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

98

$$\left. \begin{aligned} (\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2 \\ (\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2 \end{aligned} \right\} = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} - 2(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv})$$

$$\left. \begin{aligned} + \\ - \end{aligned} \right\} 2\sqrt{(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv} - \varphi'\varphi^{iv} - \varphi''\varphi''')^2}$$

& les typis partiels que renferme  $\varphi'$ , étant comparés chacun à  $[\alpha \ \gamma \ \beta \ \delta \ \varepsilon]$ , les

correspondans de  $\varphi''$  seront  $[\alpha \ \gamma \ \beta \ \varepsilon \ \delta]$ ;

ceux de  $\varphi'''$  seront  $[\alpha \ \varepsilon \ \delta \ \beta \ \gamma]$ ;

ceux de  $\varphi^{iv}$  seront  $[\alpha \ \delta \ \varepsilon \ \gamma \ \beta]$ ;

d'où il suit que  $\varphi' \varphi''$  sera de la forme  $[a \ b \ c \ d \ e] + [a \ c \ b \ e \ d]$

qui est un *type partiel*,  $\varphi''' \varphi^{iv}$ , étant  $[a \ e \ d \ b \ c] + [a \ d \ e \ c \ b]$ ;

que  $\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv}$  étant de la forme de  $\varphi' \varphi''$ ,  $\varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi'''$  sera de celle de  $\varphi''' \varphi^{iv}$ ; &c.

Il suffit d'indiquer ici cette manière de démontrer. En faisant le calcul en entier, on trouvera

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

99

$$\begin{aligned}
 \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2} = & \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix} \\
 & + 2^2 [72010] + 2^3 3 [53020] + 2^4 5 [43201] \\
 & + 2^3 [70111] + 2^3 3 [53002] + 2^4 5 [43012] \\
 & + 2^2 [64000] + 2^3 [53200] + 2^2 5^2 [43102] \\
 & + 2^2 3 [63100] + 2^3 7 [53110] + 2^3 3 \cdot 5 [43120] \\
 & + 2^2 [63001] + 2^4 3 [53011] + 2^3 5^2 [43111] \\
 & + 2^4 [62020] + 2^3 3^2 [51022] + 2^2 3^2 5 [40222] \\
 & + 2^3 3 [62011] + 2^4 3 [51220] + 2^3 3 \cdot 5^2 [42121] \\
 & + 2^3 3 [62110] + 2^3 3 \cdot 5 [52111] + 2^2 5 [10333] \\
 & + 2^4 [62101] + 2^3 5 [24040] + 2^3 5^2 [03232] \\
 & + 2^3 [54001] + 2^2 5 [04141] + 2^4 5^2 [23131] \\
 & + 2 [54100] + 2^2 5 [43030] + 2^3 3 \cdot 5^2 [31222] \\
 & + 2^4 [54010] + 2^4 5 [43210]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} = & \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} \end{bmatrix} \\
 & + 2 \cdot 3 [72001] + 2^2 \cdot 19 [53101] + 2^3 5^2 [43021] \\
 & + 2^4 [63010] + 2^2 \cdot 3^2 7 [51202] + 2^3 3 \cdot 5^2 [42211] \\
 & + 2^4 [62200] + 3^2 \cdot 5 [24400] + 2^2 3 \cdot 5 \cdot 7 [03322] \\
 & + 2^4 5 [61111] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [04411] + 2^5 5^2 [23311] \\
 & + 5 [55000] + 2^2 3 \cdot 5 [43300] + 2^3 3^2 5^2 [22222]
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} \\ \varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi''' \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &+ 2 [73000] + 2^4 [54100] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [42013] \\ &+ 2 [70021] + 2 \cdot 7 [52030] + 2^3 3 \cdot 5 [43210] \\ &+ 2^2 [71002] + 2^4 [50032] + 3 \cdot 5 [24040] \\ &+ 2^2 [71110] + 2^2 \cdot 7 [53020] + 3^2 5 [04114] \\ &+ 2 [60040] + 2^3 \cdot 5 [53011] + 2 \cdot 3 \cdot 5 [43003] \\ &+ 2 [63100] + 2^2 \cdot 11 [51013] + 2^3 5^2 [43111] \\ &+ 2^3 [61030] + 2^4 \cdot 3 [52210] + 2 \cdot 3 \cdot 5^2 [42022] \\ &+ 2 \cdot 5 [62002] + 2 \cdot 3 \cdot 11 [52102] + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 [42121] \\ &+ 2 \cdot 3^2 [61021] + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 [51121] + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 [13033] \\ &+ 2 \cdot 11 [62011] + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 [43102] + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 [03232] \\ &+ 2 \cdot 13 [62110] + 2^2 \cdot 5^2 [41032] + 2^4 \cdot 5^2 [23113] \\ &+ 3^2 [54001] + 2 \cdot 5 \cdot 11 [42130] + 2^3 3 \cdot 5^2 [32221] \\ &+ 13 [51004] \end{aligned}$$

De cette dernière valeur, où tous les termes sont de la forme  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , on tirera

$\varphi' \varphi''' + \varphi'' \varphi^{iv}$ , en ne prenant que le type partiel  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta]$ , &

$\varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi'''$ , en prenant l'autre  $[\alpha \delta \varepsilon \gamma \beta] + [\alpha \varepsilon \delta \beta \gamma]$ : ainsi

$$\begin{aligned} \varphi' \varphi''' + \varphi'' \varphi^{iv} &= [81010] + [80101] \\ &+ 2[73000] + 2[70300] + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' \varphi^{iv} + \varphi'' \varphi''' &= [81001] + [80110] \\ &+ 2[70003] + 2[70030] + \&c. \end{aligned}$$

& calculant  $(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv} - \varphi'\varphi^{iv} - \varphi''\varphi''')^2$ , on n'y trouvera que des termes de la forme [abcde].

Il me paroît certain que ces carrés ,

$(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2$ ,  $(\varphi' - \varphi'' + \varphi''' - \varphi^{iv})^2$  &  $(\varphi' - \varphi'' - \varphi''' + \varphi^{iv})^2$  ne dépendront même , ainsi que  $u'$ , que de [21100], ou de [12200]; car on a

$$[31100] = (A)[21100] + [12200] - (A^2B^2C) - (A^2BCD),$$

& il est facile de parvenir à l'équation identique,

$$\begin{aligned} & (A^8B^2) + 2^2(A^7B^2C) + 2^23(A^7BCD) + 2^2(A^6B^4) \\ & + 2^2(A^6B^3C) + 2^25(A^6B^2C^2) + 2^25(A^6B^2CD) + \\ & + 2^3(A^6BCDE) + 2^3(A^5B^4C) + 2^4(A^5B^3C^2) + \\ & + 2 \cdot 29(A^5B^3CDE) + 2 \cdot 3^3(A^5B^2C^2D) + 2 \cdot 61(A^5B^2CDE) \\ & + 2 \cdot 13(A^4B^4C^2) + 2^4(A^4B^4CD) \\ & - 2 \cdot 3(A^4B^3C^3) + 2 \cdot 13(A^4B^3C^2D) \\ & + 2^2 \cdot 5^2(A^4B^3CDE) + 2 \cdot 3^25(A^4B^2C^2D) \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 23(A^4B^2C^2DE) + 2 \cdot 3 \cdot 13(A^3B^3C^3D) \\ & + 2^2 \cdot 5(A^3B^3C^2D^2) + 2 \cdot 103(A^3B^3C^2DE) \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13(A^3B^2C^2D^2E) - 2^2 \cdot 5 \cdot 17(A^2B^2C^2D^2E^2) \\ & + 2 \cdot [21100] \{ 2(A^5B) - 2^2(A^2B^2C^2D^2E^2) \\ & (A^5B) - 2^2(A^4B^2) + 2(A^4BC) \\ & + 3(A^3B^3) - 13(A^3B^2C) - 2^3 \cdot 3(A^3BCD) \\ & - 2^2 \cdot 3 \cdot 5(A^2B^2C^2) - 61(A^2B^2CD) + 2^3 \cdot 7(A^2BCDE) \} \\ & - 2^2[12200] \{ (A^5) - 2^2 \cdot 5(A^2B^2C) - 2^2 \cdot 5(A^2BCD) \\ & - 2^3 \cdot 3 \cdot 5(ABCDE) \} - 2[21100]^2 \{ 2 \cdot 3(A^2) + 17(AB) \} \\ & - 2^4 \cdot 5(A)[21100][12200] - 2^2 \cdot 5^2(A)[12200]^2 \\ & = \varphi'^2 + \varphi''^2 + \varphi'''^2 + \varphi^{iv2}. \end{aligned}$$

Ainsi la somme des carrés de  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , &  $\varphi^{iv}$  ne dépend, comme celle de leurs premières puissances, que de [21100] & de [12200] ; & je crois qu' on trouveroit, pour la somme cubes & celle des quatrièmes puissances, de pareilles équations; d'où, par les articles V & XXI, on auroit  $(\varphi'\varphi'' + \varphi'''\varphi^{iv})$ ,  $(\varphi'\varphi''' + \varphi''\varphi^{iv})$  &  $(\varphi'\varphi^{iv} + \varphi''\varphi''')$  en

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

102

fonction de  $[21100]$  & de  $[12200]$ : mais je suis convaincu de plus, qu'il existe, entre  $[21100]$  &  $[12200]$ , deux équations qui donneroient, par élimination, s'il étoit nécessaire, celles du sixième degré en  $[21100]$  seul, & en  $[12200]$  seul; d'où l'on tireroit l'un de ces deux *types partiels* en fonction de l'autre, soit rationnelle, en prenant un avant-dernier résultat de l'élimination, soit irrationnelle mais entière, en résolvant immédiatement. Voyez celles ci - après, entre  $u$  &  $W$  (article XXXI). Ces équations étant des fonctions rationnelles, égales identiquement à zéro, sont faciles à trouver; mais je n'ai pas fait le calcul. Je transcrirai seulement la valeur suivante

$$\begin{aligned}
& -(A^7 B^2 C) - (A^7 B C D) + 3 \cdot 5 (A^6 B C D) + 2 \cdot 7 (A^6 B^2 C^2) \\
& + 29 (A^6 B^2 C D) + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 (A^6 B C D E) \\
& + 5 (A^5 B^5) + 3 \cdot 5 (A^5 B^4 C) + 2 \cdot 3 \cdot 5 (A^5 B^3 C^2) \\
& + 3^2 \cdot 5 (A^5 B^3 C D) + 2^3 \cdot 13 (A^5 B^2 C^2 D) + 2^3 \cdot 13 (A^5 B^2 C D E) \\
& + 2 \cdot 5 \cdot 7 (A^4 B^4 C^2) + 2 \cdot 5 \cdot 11 (A^4 B^4 C D) + 5 \cdot 19 (A^4 B^3 C^3) \\
& + 2^3 \cdot 5 \cdot 7 (A^4 B^3 C^2 D) + 3 \cdot 5^2 \cdot 7 (A^4 B^3 C D E) + 3 \cdot 5 \cdot 43 (A^4 B^2 C^2 D^2) \\
& 5 \cdot 149 (A^4 B^2 C^2 D E) + 3 \cdot 5 \cdot 31 (A^3 B^3 C^3 D) \\
& + 5 \cdot 137 (A^3 B^3 C^2 D^2) + 2 \cdot 3^2 5^2 (A^3 B^3 C^2 D E) \\
& + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37 (A^3 B^2 C^2 D^2 E) + 2 \cdot 5^2 \cdot 41 (A^3 B^2 C^2 D^2 E^2) \\
& + [21100] \{ (A^6) + (A^5 B) - 3 \cdot 5 (A^4 B^2) - 3 \cdot 5 (A^4 B C) \\
& + 3 \cdot 5 (A^3 B^3) - 5 \cdot 13 (A^3 B^2 C) - 5^3 (A^3 B C D) \\
& - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 (A^2 B^2 C^2) - 5 \cdot 61 (A^2 B^2 C D) - 5 (A^2 B C D E) \} \\
& + [12200] \{ 7 (A^5) - 3 \cdot 5 (A^4 B) - 3 \cdot 5 (A^3 B^2) - 3 \cdot 5 (A^3 B C) \\
& - 2^2 \cdot 5 \cdot 7 (A^2 B^2 C) - 2 \cdot 5 \cdot 23 (A^2 B C D) + 3 \cdot 5 \cdot 71 (A B C D E) \} - 3 \cdot 5 [02211]^2 \\
& \{ (A^4) - (A^3 B) - 2 (A^2 B^2) + (A^2 B C) - \\
& 3^2 (A B C D) \} + 2 \cdot 5 [21100]^2 \{ (A)^2 + 5 (A B) \} \\
& + 2 \cdot 5 \cdot 11 (A) [21100] [12200] + 2 \cdot 5 \cdot 13 [12200]^2 = \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv},
\end{aligned}$$

laquelle fait voir que  $(\varphi' + \varphi'' - \varphi''' - \varphi^{iv})^2$  ne dépend que de trois *types partiels*, de la forme  $[\alpha\beta\beta\delta\delta]$ . Au reste, les recherches que j'ai faites sur l'équation particulière du sixième degré, dont les racines seroient l'expression générale  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$  & les cinq autres

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

103

quantités qui en résultent, si l'on y échange ses lettres  $a, b, c, d, e$ , entre elles, ne m'ayant conduit jusqu'à présent à aucune facilité qui dépendît des égalités  $\gamma = \beta, \varepsilon = \delta$ , ni des valeurs particulières de ces exposans, toute cette discussion n'a rien ici d'essentiel.

Je n'exposerai mes résultats sur cette l'équation particulière, qu'après être entré dans quelques détails sur le sixième degré en général. Il faut auparavant dire un mot de l'équation que les Auteurs ont appelé *résolvante* ou *réduite*.

XXIX. La résolvante du cinquième degré est une équation du quatrième, dont les quatre racines seront  $\Delta'^5, \Delta''^5, \Delta'''^5$  &  $\Delta^{iv5}$ . Comme il nous est facile de faire la somme des valeurs de ces lettres, la somme de leurs produits deux à deux, &c. nous connoîtrons les coefficients de cette équation.

Celui du premier terme étant l'unité, celui du second sera

$$-2^2 M - 2 \cdot 5^2 u',$$

valeurs données dans l'article précédent.

Si l'on fait

$$\begin{aligned} & (A^4 B) + 2(A^3 B^2) + 2^2(A^3 BC) + 2 \cdot 3(A^2 B^2 C) \\ & + 2^2 \cdot 3(A^2 BCD) - 2u' = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{iv} = \Phi, \\ & (A^5) + 2^3 3 \cdot 5(ABCDE) + 2 \cdot 5u' = \Psi, \\ & \& \varphi' \varphi'' + \varphi''' \varphi^{iv} = V \end{aligned}$$

dont la valeur en *types partiels* de la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$  se trouve ci-dessus, le coefficient du troisième terme sera

$$2 \cdot 3\Psi^2 - 3 \cdot 5\Phi\Psi + 5^2\Phi^2 - 5^3V.$$

Si l'on fait encore

$$\varphi'^2 \varphi^{iv} + \varphi''^2 \varphi''' + \varphi'''^2 \varphi' + \varphi^{iv2} \varphi'' = U$$

que l'on trouvera n'être aussi composé que de *types partiels* de la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , le coefficient du quatrième terme sera

$$= 2^2\Psi^3 - 3 \cdot 5\Phi\Psi^2 + 2 \cdot 5^3\Phi^2\Psi + 2 \cdot 5^3V\Psi + 5^3\Phi^2 - 5^4\Phi V - 5^4U.$$

Le cinquième & dernier terme est enfin

$$\begin{aligned} & \{(A^4) - (A^3 B) + (A^2 B^2) + 2(A^2 BC) \\ & - (ABCD) - 5[21100]\}^5. \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

104

Il y a cinq autres équations pareilles, qu'on tireroit de celle-ci, en y échangeant de toutes les manières les lettres  $a, b, c, d, e$  entre elles; d'où il suit que le produit de ces six équations seroit une équation complète du 24.<sup>e</sup> degré, qui n'auroit pour coefficients que des fonctions rationnelles de ceux de la proposée.

Pour faire usage de cette équation du 24.<sup>e</sup> degré, il faudroit savoir en dégager le facteur irrationnel qui est la résolvante ci-dessus, & l'on voit que cette décomposition dépend, en dernière analyse, de la facilité d'obtenir  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$  en types.

\* III IV II I

XXX. Si l'on fait

$$\begin{aligned}(a+b+\rho'\overline{c+d}+\rho''\overline{e+f})^3 &= \Delta'^3 \\(a+c+\rho'\overline{b+e}+\rho''\overline{d+f})^3 &= \Delta''^3 \\(a+d+\rho'\overline{b+f}+\rho''\overline{c+e})^3 &= \Delta'''^3 \\(a+e+\rho'\overline{c+f}+\rho''\overline{b+d})^3 &= \Delta^{iv3} \\(a+f+\rho'\overline{d+e}+\rho''\overline{b+c})^3 &= \Delta^{v3},\end{aligned}$$

on aura (*article XIV*), pour la fonction qui égale indifféremment ou  $a$ , ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou  $e$ , ou  $f$  ceci

$$\frac{1}{6}[(A)+\Delta'+\Delta''+\Delta'''+\Delta^{iv}+\Delta^v].$$

Élevant les troisièmes puissances indiquées, si l'on suppose

$$\begin{aligned}ab(a+b)+cd(c+d)+ef(e+f) \\+2(a+b)(c+d)(e+f) &= u' \\(a+b)(c+d)[(a+b)-(c+d)] \\-(a+b)(e+f)[(a+b)-(e+f)] \\+(c+d)(e+f)[(c+d)-(e+f)] &= w'\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}u' &= [\underset{\text{V VI II I III IV}}{210000}] + 2[\underset{\text{V VI II I III IV}}{201010}] + 2[\underset{\text{V VI II I III IV}}{101001}] \\w' &= [\underset{\text{V VI II I III IV}}{201000}] + [\underset{\text{V VI II I III IV}}{200100}] + 2[\underset{\text{V VI II I III IV}}{111000}] \\&\quad - [\underset{\text{V VI II I III IV}}{200010}] - [\underset{\text{V VI II I III IV}}{200001}] - 2[\underset{\text{V VI II I III IV}}{110010}]\end{aligned}$$

on a

$$\Delta'^3 = (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3}{2}u' + \frac{3}{2}w'\sqrt{-3}.$$

$u'$  dépend du quinzième degré, ainsi que  $w'^2$ : mais si l'on suppose que  $u''$  &  $w''$  sont ce que deviennent  $u'$  &  $w'$ , si l'on y écrit

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

105

$ac$  &  $a + c$  pour  $ab$  &  $a + b$ ,  
 $be$  &  $b + e$  pour  $cd$  &  $c + d$ ,  
 $df$  &  $d + f$  pour  $ef$  &  $e + f$ ,

que  $u'''$  &  $w'''$  sont ce que deviennent les mêmes  $u'$  &  $w'$  si l'on y écrit

$ad$  &  $a + d$  pour  $ab$  &  $a + b$ ,  
 $bf$  &  $b + f$  pour  $cd$  &  $c + d$ ,  
 $ce$  &  $c + e$  pour  $ef$  &  $e + f$ ,

&c. ou bien, en regardant les termes de  $u'$  &  $w'^2$  comme déduits du *type partiel*

$$\begin{aligned} & [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\gamma\delta] \\ & [\alpha\beta\gamma\delta\zeta\epsilon] + [\alpha\beta\zeta\epsilon\delta\gamma] + [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon\zeta] + [\alpha\beta\epsilon\zeta\gamma\delta] \end{aligned}$$

si l'on suppose pour  $u''$  &  $w''^2$  les correspondans  $[\alpha\delta\beta\zeta\gamma\epsilon] + \&c.$

pour  $u'''$  &  $w'''^2$  .....  $[\alpha\gamma\epsilon\beta\zeta\delta] + \&c.$

pour  $u^{iv}$  &  $w^{iv2}$  .....  $[\alpha\zeta\delta\epsilon\beta\gamma] + \&c.$

pour  $u^v$  &  $w^{v2}$  .....  $[\alpha\epsilon\zeta\gamma\delta\beta] + \&c.$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta^{u^3} &= (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u'' + \frac{3}{2}w''\sqrt{-3}, \\ \Delta^{u'^3} &= (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u''' + \frac{3}{2}w''' \sqrt{-3}, \\ \Delta^{u^{iv3}} &= (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u^{iv} + \frac{3}{2}w^{iv} \sqrt{-3}, \\ \Delta^{u^v3} &= (A^3) - \frac{3}{2}(A^2B) - 3(ABC) + \frac{3^2}{2}u^v + \frac{3}{2}w^v \sqrt{-3}, \end{aligned}$$

les coefficients des équations du cinquième degré qui auront pour racines

$u', u'', u''', u^{iv}, u^v$ , &  $w'^2, w''^2, w'''^2, w^{iv2}, w^{v2}$ , dépendront d'équations particulières du sixième degré, puisqu'il y a en  $u$  &  $w^2$  six pareilles équations du cinquième degré, qui résultent des échanges des lettres  $a, b, c, d, e, f$ , entre elles; comme le prouvent les Tables suivantes,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

106

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cd$ | $ef$ |
| $ae$ | $fc$ | $db$ |
| $ad$ | $bf$ | $ce$ |
| $ac$ | $eb$ | $fd$ |
| $af$ | $de$ | $bc$ |

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cf$ | $de$ |
| $ad$ | $ec$ | $fb$ |
| $af$ | $be$ | $cd$ |
| $ac$ | $db$ | $ef$ |
| $ae$ | $fd$ | $bc$ |

  

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $cd$ | $fe$ |
| $af$ | $ec$ | $db$ |
| $ad$ | $be$ | $cf$ |
| $ac$ | $fb$ | $ed$ |
| $ae$ | $df$ | $bc$ |

|      |      |      |
|------|------|------|
| $ab$ | $ce$ | $df$ |
| $ad$ | $fc$ | $eb$ |
| $ae$ | $bf$ | $cd$ |
| $ac$ | $db$ | $fe$ |
| $af$ | $ed$ | $bc$ |

dont les applications me paroissent sensibles.

Les coefficients de ces équations du cinquième degré se déduiront du type *partiel* suivant,

$$\begin{aligned}
 & [\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta] + [\alpha\epsilon\beta\delta\zeta\gamma] + [\alpha\zeta\epsilon\delta\gamma\beta] + [\alpha\gamma\zeta\delta\beta\epsilon] \\
 & + [\beta\gamma\alpha\zeta\delta\epsilon] + [\epsilon\beta\alpha\gamma\delta\zeta] + [\zeta\epsilon\alpha\beta\delta\gamma] + [\gamma\zeta\alpha\epsilon\delta\beta] \\
 & + [\gamma\alpha\beta\epsilon\zeta\delta] + [\beta\alpha\epsilon\zeta\gamma\delta] + [\epsilon\alpha\zeta\gamma\beta\delta] + [\zeta\alpha\gamma\beta\epsilon\delta] \\
 & + [\delta\epsilon\zeta\alpha\beta\gamma] + [\delta\beta\epsilon\alpha\gamma\zeta] + [\delta\gamma\beta\alpha\zeta\epsilon] + [\delta\zeta\gamma\alpha\epsilon\beta] \\
 & + [\epsilon\zeta\delta\gamma\alpha\beta] + [\beta\epsilon\delta\zeta\alpha\gamma] + [\gamma\beta\delta\epsilon\alpha\zeta] + [\zeta\gamma\delta\beta\alpha\epsilon] \\
 & + [\zeta\delta\epsilon\beta\gamma\alpha] + [\epsilon\delta\beta\gamma\zeta\alpha] + [\beta\delta\gamma\zeta\epsilon\alpha] + [\gamma\delta\zeta\epsilon\beta\alpha],
 \end{aligned}$$

qui devient un type complet, lorsqu'on a  $\zeta = \epsilon = \delta$ .

Ajoutons que l'on a les équations identiques

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

107

$$\begin{aligned}
 [210000] &= (A)(ab + cd + ef) \\
 &\quad \text{V VI II I III IV} \\
 &+ (a + b)(c + d)(e + f) - (ABC), \text{ \&} \\
 &\quad w'^2 = 4[ab + cd + ef - (AB)]^5 \\
 &\quad - 4(a + b)(c + d)(e + f)[27(a + b)(c + d)(e + f) + (A)^3] \\
 &\quad + [9(a + b)(c + d)(e + f) - (A)(ab + cd + ef - (AB))]^3
 \end{aligned}$$

& qu'il me paroît certain qu'il existe deux équations entre  
 $ab + cd + ef$  &  $(a + b)(c + d)(e + f)$ ,  
 analogues à celles entre  $u$  &  $w$  de l'article qui suit.

XXXI. Si l'on emploie la forme de l'article XV, on aura

$$\begin{aligned}
 (a + b + c - d - e - f)^2 &= (A)^2 - 2(AB) \\
 + 4(ab + ac + bc + de + df + ef).
 \end{aligned}$$

Soit  $ab + ac + bc + de + df + ef = u'$ ; comme en échangeant entr'elles les lettres  $a, b, c, d, e, f$ , de toutes les manières, il s'y fait neuf changemens, soient  $u', u'', u''', u^{iv}$ , &c. ces dix valeurs; chacun des dix carrés dépendra de l'une d'elles; & si l'on calcule les coefficients de l'équation du dixième degré dont elles sont les racines, on trouvera, cette équation étant

$$\begin{aligned}
 u^{10} + a_1 u^9 + a_2 u^8 + a_3 u^7 + \&c. &= 0, \\
 \& \\
 x^6 + p x^4 + q x^3 + r x^2 + s x + t &= 0
 \end{aligned}$$

étant la proposée,

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

108

$$a_1 = -2^2 p, \quad a_2 = 2 \cdot 3 p^2 - 2 \cdot 3 r,$$

$$a_3 = -2^2 p^3 - 3 q^2 + 2 \cdot 13 p r + 2 \cdot 3 \cdot 11 r,$$

$$a_4 = p^4 - 2 \cdot 3 \cdot 7 p^2 r + 2^2 \cdot 3^2 q f + 3^2 p q^2 + r^2 - 2^2 \cdot 3^4 p t$$

$$\begin{aligned} a_5 = & -3^2 p^2 q^2 - 2 \cdot 3^2 p r^2 + 2 \cdot 3 \cdot 107 p^2 t \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 5 p^3 r - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 p q f + 2 \cdot 3 \cdot 19 r t \\ & + 3^2 p q^2 + 2^2 \cdot 3^4 q^2 r - 3 \cdot 41 f^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 = & -3 p^3 q^2 + 2^3 \cdot 3 r^3 + 2 \cdot 3 \cdot 23 q^2 s \\ & + 3 q^4 - 2^2 \cdot 37 p^2 q f - 2 \cdot 241 \cdot p r t \\ & - 2^3 p^4 r - 2 \cdot 3 \cdot 23 q r f + 3 \cdot 43 t^2 \\ & - 2^3 \cdot 5 p q^2 r + 521 p f^2 \\ & + 7^2 p^2 r^2 - 2^7 5 p^3 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 = & -2 \cdot 3 p q^4 - 2^2 \cdot 3^2 q^3 f + 2^4 \cdot 47 p^2 r t \\ & + 2^2 \cdot 11 p^2 q^2 r + 2 \cdot 5 \cdot 47 p q r f + 2^4 \cdot 5 r^2 t \\ & - 2^4 \cdot 3 p^3 r^2 - 2 \cdot 449 p^2 f^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot 19 q f t \\ & - 2 \cdot q^2 r^2 + 2 \cdot 47 r f^2 - 2^7 3 p t^2 \\ & - 2^4 \cdot 5 p r^3 + 2^6 \cdot 5 p^4 t \\ & - 2^4 \cdot 5 p^3 q f - 2 \cdot 3 \cdot 61 p q^2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_8 = & 3 p^2 q^4 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 p q^3 f - 2^9 p^3 r t \\ & - 2^4 p^3 q^2 r - 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 p^2 q r f - 2 \cdot 3 q^2 r t \\ & - 2 \cdot 3 q^4 r - 2^3 \cdot 3 q r^2 f - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 p r^2 t \\ & + 2^4 q^4 r^2 + 2^2 \cdot 197 p^3 f^2 - 2^2 \cdot 3 \cdot 71 p q f t \\ & + 2^4 \cdot 3^2 p q^2 r^2 + 3 \cdot 17 q^2 f^2 + 2 \cdot 31 \cdot 1 f^2 t \\ & + 2^{11} \cdot 11 p^2 r^3 - 2 \cdot 3 \cdot 41 p r f^2 + 2^7 \cdot 3 p^2 t^2 \\ & + 2^4 r^4 - 2^6 p^5 t + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 r t^2 \\ & + 2^4 p^4 q f + 2^2 3^4 p^2 q^2 t \end{aligned}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

109

$$\begin{aligned}
 a_9 = & -q^6 & -2^5 \cdot 11 p^4 f^2 + 2^9 r^t t \\
 & + 2 \cdot 7 p q^4 r & - 2 \cdot 43 p q^2 f^2 - 2^6 \cdot 11 p^2 q f t \\
 & - 2^5 p^2 q^2 r^2 & + 2^3 \cdot 3^3 p^2 r f^2 + 2^3 \cdot 3 q r f t \\
 & - 2^5 p^3 r^3 & - 2^3 r^2 f^2 & - 2^4 \cdot 7 p f^2 t \\
 & + 2^3 q^2 r^3 & - 2 \cdot 7 q f^3 & - 2^7 p^3 t^2 \\
 & - 2^5 p r^4 & - 2^5 \cdot 3 p^3 q^2 t & - 2^4 \cdot 3 q^2 t^2 \\
 & - 2^6 p^2 q^3 f & + 2^2 \cdot 3 q^4 t & - 2^8 p r t^2 \\
 & + 2^6 \cdot 5 p^3 q r f & + 2^7 p^4 r t & + 2^6 t^3 \\
 & - 2 \cdot 3 q^3 r f & + 2^3 p q^2 r t \\
 & + 2^3 \cdot 5 p q r^2 f & + 2^3 \cdot 7 p^2 r^2 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{10} = & p q^6 & + 2^6 p^5 f^2 & - 2^5 p r^3 t \\
 & - 2^3 p^2 q^4 & + 2^3 3^2 p^2 q^2 f^2 & + 2^6 \cdot 3 p^3 q f t \\
 & + 2^4 p^3 q^2 r & - 2^6 p^3 r f^2 & - 2^4 p q r f t \\
 & + q^4 r^2 & + 2^6 q^2 r f^2 & + 2^4 \cdot 3 p^2 f^2 t \\
 & - 2^3 p q^2 r^3 & + 2^3 p r^2 f^2 & - 2^3 r f^2 t \\
 & + 2^4 p^2 r^4 & + 2^3 \cdot 3 p q f^3 & - 2^3 r f^2 t \\
 & + 2^4 p^3 q^3 f & + f^4 & + 2^7 p^2 r t^2 \\
 & - 2^6 p^4 q r f & - 2^2 3 p q^4 t & + 2^4 r^2 t^2 \\
 & + 2^2 p q^3 r f & - 2^6 p^3 r^2 t & - 2^6 p t^3 \\
 & - 2^4 p^2 q r^2 f & - 2^3 q^2 r^2 t
 \end{aligned}$$

& l'on aura

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

110

$$x = \frac{1}{6} \left[ \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ - \\ - \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u'' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u''' - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{iv} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u^v - p)} \\ \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{vi} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{vii} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ + \\ - \end{array} \right\} \sqrt{(u^{viii} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^{ix} - p)} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array} \right\} \sqrt{(u^x - p)} \right].$$

Si l'on veut n'employer qu'une valeur de  $u$ , on aura

$$x^3 - x^2 \sqrt{(u - p)} + \Lambda x - \frac{1}{2} w + \sqrt{w^2 - 4t} = 0,$$

en supposant

$$\Lambda^2 - u\Lambda + v + \sqrt{(u - p)(w^2 - 4t)} = 0$$

& les deux équations citées précédemment,

$$\begin{aligned} (w + q)^3 - (u - p)(u^2 - 4r)(w + q) + 4(u - p)^2(uw + 2f) &= 0, \\ (u^2 - 4r)(w + q)^2 + 16(u - p)^2(w^2 - 4t) \\ + 4(u - p)(w + q)(uw + 2f) - (u - p)(u^2 - 4r)^2 &= 0, \end{aligned}$$

où la valeur de  $w'$  en fonction des racines est  $abc + def$ .

XXXII. C'est donc à l'équation du dixième degré ci-dessus que l'on parvient, par la supposition que la proposée du sixième est le produit de deux du troisième. C'est de même à celle du quinzième degré de l'article XXX, qu'on arrive en la supposant le produit de trois du second: ainsi les motifs d'option entre le procédé de cet article XXX, & celui de l'article XXXI, dépendent de la nature des racines, dans les cas particuliers; quoique celui-ci se ramène facilement au premier; car si l'on fait

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

111

$$\begin{aligned}ac + ae + ce + bd + bf + df &= u'', \\ac + af + cf + bd + be + de &= u''', \\ad + ae + de + bc + bf + cf &= u^{iv}, \\ad + af + df + bc + be + ce &= u^v,\end{aligned}$$

les coefficients de l'équation qui aura ces quatre racines , se déduiront du même *type partiel* que  $u'$  &  $w'^2$  de l'article XXX.

Celui du second terme, par exemple, sera

$$-2(AB) + 2(ab + cd + ef),$$

& ainsi des autres.

Il faut appliquer ces réflexions à l'équation dont les six racines seroient

$$\begin{aligned}[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon], [\alpha\beta\epsilon\gamma\delta], [\alpha\beta\delta\epsilon\gamma], \\[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta], [\alpha\beta\delta\gamma\epsilon], [\alpha\beta\epsilon\delta\gamma].\end{aligned}$$

Mais nous dirons un mot auparavant de certaines équations plus simples qui ont de l'affinité avec elle.

XXXIII. L'équation qui auroit les six racines

$$\begin{aligned}a^\alpha b^\beta c^\gamma, a^\gamma b^\alpha c^\beta, a^\beta b^\gamma c^\alpha, \\a^\alpha b^\gamma c^\beta, a^\beta b^\alpha c^\gamma, a^\gamma b^\beta c^\alpha,\end{aligned}$$

par exemple, conduit par les procédés des articles XXX & XXXI , a des équations du premier degré ; & si l'on fait  $a^\alpha b^\beta c^\gamma = u'$ , &c. , on aura

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi^3 - (A^\alpha B^\beta C^\gamma)\Phi^2 + [(A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{2\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma})]\Phi \\ - [(A^{\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+2\gamma}) + 2(A^{\alpha+\beta+\gamma} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma})] = 0;\end{aligned}$$

$$\Psi^3 - (A^{2\alpha} B^{\beta+\gamma} C^{\beta+\gamma})\Psi^2 + (A^{2\alpha+\beta+\gamma} B^{2\alpha+\beta+\gamma} C^{2\beta+2\gamma})\Psi - (A^{2\alpha+2\beta+2\gamma} B^{2\alpha+2\beta+2\gamma} C^{2\alpha+2\beta+2\gamma}) = 0;$$

ou bien

$$u^3 - \Gamma u^2 + \Lambda u - (A^{\alpha+\beta+\gamma} B^{\alpha+\beta+\gamma} C^{\alpha+\beta+\gamma}) = 0,$$

$$\Gamma^2 - (A^\alpha B^\beta C^\gamma) \Gamma + [(A^{2\alpha} B^{\beta+\gamma} C^{\beta+\gamma}) + (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\beta} C^{2\gamma}) + (A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\beta} C^{2\beta})] = 0,$$

$$\Lambda^2 - (A^{\alpha+\beta} B^{\alpha+\gamma} C^{\beta+\gamma}) \Lambda + [(A^{2\alpha+2\beta} B^{\alpha+\beta+2\gamma} C^{\alpha+\beta+2\gamma}) + (A^{2\alpha+\beta+\gamma} B^{2\alpha+\beta+\gamma} C^{2\beta+2\gamma}) + (A^{2\alpha+2\gamma} B^{\alpha+2\beta+\gamma} C^{\alpha+2\beta+\gamma})] = 0.$$

Dans le cas d'une substitution de valeurs déterminées pour  $\alpha$ ,  $\beta$  &  $\gamma$  il ne faut pas oublier nos suppositions. Si, par exemple,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ; on aura

$$\Gamma^2 - (A^2 B) \Gamma + [(A^4 B C) + (A^3 B^3) + 3(A^2 B^2 C^2)] = 0,$$

parce que  $(A^{\alpha+\gamma} B^{\alpha+\gamma} C^{2\beta})$  représente trois termes, & que  $(A^2 B^2 C^2)$  n'en représente qu'un.

L'équation dont les six racines seroient

$$\begin{aligned} & [\alpha\beta\gamma\delta], [\alpha\delta\beta\gamma], [\alpha\gamma\delta\beta], \\ & [\alpha\beta\delta\gamma], [\alpha\gamma\beta\delta], [\alpha\delta\gamma\beta], \end{aligned}$$

traitée par le procédé de l'article XXXI, conduit à une équation du dixième degré, résoluble en deux facteurs rationels, l'un du quatrième degré, & l'autre du sixième ; mais traitée par celui de l'article XXX, elle conduit à une équation du premier; ainsi en y supposant  $[\alpha\beta\gamma\delta] = u'$ , &c. &

$$u^2 - \Phi u + \Psi = 0$$

les coefficients des équations du troisième degré en  $\Phi$  &  $\Psi$  sont des types ; ce qu'il est facile de prouver à priori, puisque  $[\alpha\beta\gamma\delta] + [\alpha\beta\delta\gamma]$  est un type partiel, & dépend du troisième degré, & que  $[\alpha\beta\gamma\delta] \times [\alpha\beta\delta\gamma]$  est de la forme  $[abcd] + [abdc]$ .

XXXIV. Il faut observer au sujet de l'équation dont les six racines seroient  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ ,

&c. qu'elle devient du troisième degré, comme les deux de l'article précédent, si l'on y fait  $a = b$ , ou  $a = c$ , ou  $b = c$ , &c.

Il faut observer encore que, si au lieu du premier système d'équations entre les valeurs de  $r$  ( article III), on eût employé le second, on eût eu  $[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  au lieu de  $[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]$ ;

& que dans les dispositions des lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , qui amèneraient par le premier système,  $[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta]$  &  $[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$ , on auroit par le second,  $[\alpha\beta\delta\gamma\epsilon]$  &  $[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$ .

Les coefficients de l'équation qui auroit ces six racines; sont faciles à obtenir en types : car au moyen des remarques de l'article XXVI, on chercheroit la somme des carrés de ces

## M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

113

racines, la somme de leurs cubes, &c. ce qui n'exige que de calculer un seul des carrés, ou un seul des cubes; & on en concluroit par l'article V, la somme de leurs produits deux à deux; trois à trois, &c. La solution générale du cinquième degré se trouverait ramenée par-là, à des recherches sur une équation particulière du sixième, dont les coefficients seroient des fonctions rationnelles de ceux de la proposée: substituant alors dans les équations du 15.<sup>e</sup> & du 10.<sup>e</sup> degré d'où dépend généralement le sixième, lesquelles se calculeroient de la même manière; & si elles ne se réduisoient pas, substituant de nouveau dans celles d'où dépendent généralement le 15.<sup>e</sup> & 10.<sup>e</sup> degré, &c. il faudroit, si le cinquième degré est résoluble généralement, qu'on arrivât en dernière analyse à des équations qui eussent des facteurs rationnels, du quatrième degré au plus; & que dans l'usage à faire des racines de ces facteurs égalés à zéro, on ne fût obligé de passer que par des équations d'un degré moindre que le cinquième. Mais nous pouvons suivre le fil de ces recherches, sans calculer les équations même, en substituant constamment leurs racines pour  $a, b, c, d, e, f$ , &c. dans les différentes formes élémentaires de quantités qui sont indifféremment l'une de six, de dix, de quinze, &c. car le nombre de changemens produits par les différentes substitutions possibles d'une lettre pour l'autre, nous donnera toujours le nouvel état de la difficulté; & si quelque chose nous empêche d'épuiser successivement par ce moyen toutes les possibilités, ce ne sera que la longueur des calculs.

Il s'agit d'abord de substituer nos six racines dans les articles XXX & XXXI.

1.<sup>o</sup> Si, dans l'article XXX, on fait cette substitution dans l'ordre suivant,

$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  pour  $a$   
\* III IV III

$[\alpha\beta\epsilon\gamma\delta]$  pour  $b$   
\* IV I II III

$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$  pour  $c$   
\* II IV I III

$[\alpha\beta\gamma\epsilon\delta]$  pour  $d$   
\* III IV III

$[\alpha\beta\epsilon\delta\gamma]$  pour  $e$   
\* II IV I III

$[\alpha\beta\delta\epsilon\gamma]$  pour  $f$   
\* IV I II III

on trouvera que  $u'$  &  $w'^2$  de cet article XXX ne dépendent plus du quinzième degré, mais dépendent du cinquième: l'équation qui a pour racines,  $u', u'', u''', u^{iv}$  &  $u^v$ , devient entièrement rationnelle, & les autres valeurs de  $u$  dépendent du 10.<sup>e</sup> degré.

Ainsi la résolution générale du cinquième degré est ramenée par-là, à la résolution d'une, ou, si l'on veut, de plusieurs équations particulières de ce même cinquième degré: mais les racines de ces équations particulières se déduisent des mêmes *types partiels*. que les racines de la proposée, c'est-à-dire de  $[a b c d e]$ , &c.

I II V III IV  
I II III V IV  
I IV V III II

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

114

2.<sup>o</sup> Si l'on fait les substitutions analogues, dans l'article XXXI, on trouve dix valeurs de  $u$ , lesquelles se déduisent des mêmes *types partiels* que les autres quantités dépendantes du dixième degré, dont je viens de parler ; ( leur forme est  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , &c. , &c. )

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{III} & \text{II} & \text{IV} & \text{V} \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} & \text{V} & \text{IV} \end{array}$$

& l'équation du 126.<sup>e</sup> degré où l'on arrive en faisant une quantité qui soit l'une de dix, sans élever d'autres puissances que des carrés, se résout, pour ce cas, en six facteurs rationels du sixième degré dont les racines se déduisent des *types partiels*

$[a b c d e]$ , &c. d'où l'on est parti, & en six t,éleurs rationels du quinzième degré dont les

$$\begin{array}{ccccc} * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array}$$

racines se déduisent des mêmes *types partiels* que les sommes ou les produits deux à deux des précédens ; c'est- à- dire de  $[\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon]$ , &c. Enfin , l'équation du

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{V} & \text{IV} \\ \text{I} & \text{IV} & \text{V} & \text{III} & \text{II} \end{array}$$

945.<sup>e</sup> degré où l'on arrive en faisant une quantité qui soit l'une de dix, avec des radicaux cinquièmes seulement, n'a, pour ce cas, aucun facteur d'un degré inférieur au cinquième, & ses racines se déduisent toutes de quelqu'une des formes ci-dessus.

Voilà tout ce que le calcul m'a appris sur cet objet , & je n'ai pas assez de foi aux conjectures dans une matière aussi épineuse, pour oser m'y livrer ici. J'ajourerai seulement que je n'ai trouvé aucun *type partiel* composé de cinq lettres, qui dépendît du quatrième degré, ni du troisième: & que je suis convaincu qu'il n'en existe pas : mais il y en a un qui dépend du second degré; c'est

$$\begin{aligned} & [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon] + [\alpha \beta \delta \varepsilon \gamma] + [\alpha \beta \varepsilon \gamma \delta] \\ & + [\alpha \gamma \beta \varepsilon \delta] + [\alpha \gamma \varepsilon \delta \beta] + [\alpha \gamma \delta \beta \varepsilon] \\ & + [\alpha \delta \varepsilon \beta \gamma] + [\alpha \delta \beta \gamma \varepsilon] + [\alpha \delta \gamma \varepsilon \beta] \\ & + [\alpha \varepsilon \delta \gamma \beta] + [\alpha \varepsilon \gamma \beta \delta] + [\alpha \varepsilon \beta \delta \gamma] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en général, que dans le cas des valeurs particulières de  $a, b, c, d, e, f$ , ci-dessus le *type partiel*

$$\begin{aligned} & [\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta] + [\beta \gamma \alpha \zeta \delta \varepsilon] + [\gamma \alpha \beta \varepsilon \zeta \delta] \\ & + [\alpha \zeta \varepsilon \delta \gamma \beta] + [\zeta \varepsilon \alpha \beta \delta \gamma] + [\varepsilon \alpha \zeta \gamma \beta \delta] \\ & + [\delta \zeta \gamma \alpha \varepsilon \beta] + [\zeta \gamma \delta \beta \alpha \varepsilon] + [\gamma \delta \zeta \varepsilon \beta \alpha] \\ & + [\delta \beta \varepsilon \alpha \gamma \zeta] + [\beta \varepsilon \delta \zeta \alpha \gamma] + [\varepsilon \delta \beta \gamma \zeta \alpha] \end{aligned}$$

dépend du second degré, comme celui de l'article XXX, dont il fait partie, dépend du premier.

Au reste, il ne suffit peut-être pas, pour prononcer sur la possibilité de la résolution générale, de se borner à la simple recherche de la forme des résultats; parce que dans tel cas où l'on sait *à priori* devoir arriver à la forme  $[a b c d e]$ , il faut savoir de plus, par exemple, si l'on n'aura pas dans tous les termes , les égalités  $e = d = c$ , qui sont de ce *type*

$$\begin{array}{ccccc} * & \text{III} & \text{IV} & \text{II} & \text{I} \end{array}$$

M. VANDERMONDE : MÉMOIRE SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS.

Translated by Ian Bruce : 5/22/2018

115

*partiel*, un *type* complet; il faut savoir si ceux des termes où l'on n'auroit pas  $e = d = c$ , ne seroient pas compris sous la forme  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon] + 2[\alpha\beta\delta\varepsilon\gamma]$ , dont les égalités  $\gamma = \beta$ ,  $\varepsilon = \delta$ , sont encore un *type* complet; &c. car les valeurs particulières des exposans, leurs rapports déterminés dans la suite de *types partiels* conformes d'où l'on sera parti, peuvent faire que ces égalités aient lieu, à cette période du calcul.

XXXV. Sans les cas particuliers où l'on a des équations entre les racines, la méthode que nous venons d'exposer peut servir à résoudre, sans passer par les formules générales de résolution.

L'équation  $r^{11} - 1 = 0$  nous en fournira un exemple: elle conduit (*article VI*) à celle-ci,

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

dont les racines étant  $a, b, c, d, e$ , on aura par une suite très simple de l'*article XI*.

$$\begin{aligned} a^2 &= -b + 2 & b^2 &= -d + 2 & c^2 &= -e + 2 & d^2 &= -c + 2 \\ ab &= -a - c & bc &= -a - e & cd &= -a - d & de &= -a - b \\ ac &= -b - d & bd &= -b - e & ce &= -b - c \\ ad &= -c - e & be &= -c - d & e^2 &= -a + 2 \\ ae &= -d - e, \end{aligned}$$

& tous les *types partiels* de la forme  $[a \ b \ c \ d \ e]$ , auront une valeur purement rationnelle;

ainsi, en prenant par-tout dans l'*article XXVIII*  $[\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma]$  au lieu de  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$ , on trouvera

$$u' = 6; \varphi' = 26, \varphi'' = -18, \varphi''' = -51, \varphi^{iv} = 4.$$

On a aussi  $(A^5) = 16$ ,  $(ABCDE) = 1$ ,  $(A) = 1$ ; d'où

$$x = \frac{1}{5}[1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}]$$

en substituant les valeurs

$$\begin{aligned} \Delta' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta'' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta''' &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \\ \Delta^{iv} &= \sqrt[5]{\frac{11}{4}}(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5 + 2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5 - 2\sqrt{5}}) \end{aligned}$$

XXXVI. Comme pour résoudre l'équation

$$\left. \begin{array}{l} x^m - x^{m-1} \dots + \&c. \\ -m-1x^{m-2} \end{array} \right\} = 0,$$

il n'est question au plus que de déterminer (*article VI*) la quantité qui est indifféremment l'une de ses racines, & nullement de faire qu'il soit indifférent d'y échanger ces racines entre elles, cette résolution nous sera toujours très- facile.

Ainsi, des trois conditions distinctes de la résolution générale des Equations (*article IV*), la première (*article VI*) & la troisième (*article V*) sont toujours rigoureusement en notre pouvoir; & nous avons pour remplir la seconde, une marche directe & uniforme (*article XXXIV*) qui n'a de difficulté que par la longueur inévitable.

